ÜBER EIN DIVISIONSPROBLEM BEI DIFFERENZIERBAREN FUNKTIONEN KOMPLEXER VARIABLEN.

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Alfons Skirde
aus Wangst (Ostpreußen)

Göttingen 1974

ÜBER EIN DIVISIONSPROBLEM BEI DIFFERENZIERBAREN FUNKTIONEN KOMPLEXER VARIABLEN.

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Alfons Skirde
aus Wangst (Ostpreußen)

Göttingen 1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

- D7 -

Referent: Prof. Dr. H. Grauert

Korreferent: Prof. Dr. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Oktober 1974

Nach M.G. Lasalle[4] gilt folgende Divisionsformel:

Ist $P(x,u) = u^p + a_1(x)u^{p-1} + \ldots\ldots + a_p(x)$ ein Polynom mit C^∞-Koeffizienten a_i auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, die nebst den ersten partiellen Ableitungen auf U beschränkt sind, und ist $k \in \mathbb{N}$ oder $k=\infty$, $k \geq p$, so gibt es zu $f \in C^{k+1}(U \times \mathbb{R}^1)$ Funktionen

$$g_f \in C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(U \times \mathbb{R}^1), r_{f,i} \in C^{\left[\frac{k+1}{p}\right]-1}(U), i=1,\ldots,p, \text{ mit}$$

$$f(x,u) = g_f(x,u)P(x,u) + \sum_{i=1}^{p} r_{f,i}(x)u^{p-i}, (x,u) \in U \times \mathbb{R}^1.$$

Die Zuordnung $f \longmapsto (g_f, r_{f,1}, \ldots, r_{f,p})$ kann linear und stetig gewählt werden.

Ein ähnliches Resultat hat M.Barbancon[3] gezeigt.

Der C^∞-Fall ist für Keime in $O \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ zuerst von B.Malgrange[5] bewiesen worden (ohne jedoch die genannte Linearität zu zeigen); weitere Beweise für diesen Fall gibt es von Nirenberg [8], J.Mather[6] und S.Lojasiewicz [7]

Die Beweise der beiden letztgenannten Autoren implizieren, daß die genannte zuordnung linear und stetig gewählt werden kann.

Läßt man zu, daß die oben mit u bezeichnete Variable komplex ist, so wird die erwähnte Division i.a. unmöglich: z.B. läßt sich eine C^k-Funktion komplexer Variabler i.a. nicht durch ein holomorphes Polynom $P(x,u)$ mit Rest dividieren, wie das Beispiel $f(x,u)=x\bar{u}$, $P(x,u)=u-x$ zeigt. Als Ersatz wollen wir zeigen:

Satz I:

Für $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$, $k \geq 2p$, $p \in \mathbb{N}$, werde $k' \in \mathbb{N}$ oder $k' = \infty$ so gewählt, daß $k' \geq \left[\frac{k-p}{p}\right]$ gilt.

Ist dann $P(x,u) = u^p + a_1(x)u^{p-1} + \ldots + a_p(x)$ mit $a_i \in C^{k'}(U)$, $i = 1,\ldots,p$, U offen $\subset \mathbb{R}^n$, ein normiertes Polynom, so gibt es eine lineare stetige Abbildung

$$L_k : C^{k+2}(U \times \mathbb{C}^1) \to C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(U \times \mathbb{C}^1) \times C^{\left[\frac{k-2p}{p}\right]}(U \times \mathbb{C}^1) \times \left\{C^{\left[\frac{k+2}{p}\right]-2}(U)\right\}^{p^2},$$

$$f \longmapsto (G_f, H_f, r_{f,i,j} : i,j = 1,\ldots,p) := L_k(f),$$

mit

$$f(x,u) = G_f(x,u) \cdot P(x,u) + H_f(x,u)\overline{P(x,u)} + \sum_{i,j=1}^{p} r_{f,i,j}(x) u^{p-i}\bar{u}^{p-j}, \quad (x,u) \in U \times \mathbb{C}^1$$

Der Beweis dieses Resultats besteht in geeignetem Anwenden und Verallgemeinern der Methoden von M. G. Lasalle und geschieht in 4 Schritten:

(1) Man betrachtet ein generisches Polynom $P(\lambda,u) = u^p + \lambda_1 u^{p-1} + \ldots + \lambda_p$ und bezeichnet mit $\mathcal{P}^k$ den Raum der C^k-Funktionen F auf $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$, die in einer Umgebung von $\mathbb{R}^n \times X \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$ holomorph bzgl. u und in einer Umgebung von $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1) \times X$ holomorph bzgl. w sind ($X := \{(\lambda,u) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1 : P(\lambda,u) = 0\}$, (x,λ,u,μ,w) bezeichnen die Variablen in $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$)

$F \in \mathcal{P}^k$ läßt sich dann wie im klassischen holomorphen (globalen) Fall wie folgt schreiben:

$$F = G_F \cdot P(\lambda,u) + H_F \cdot P(\mu,w) + \sum_{i,j=1}^{p} r_{F,i,j}\, u^{p-i} w^{p-j}$$

mit geeigneten C^k-Funktionen G_F, H_F abhängig von

$y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^z$, $r_{F,i,j}$ abhängig von $(x,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$; diese hängen in linearer Weise von F ab. (vgl. § 2, § 3)

(2) Man zeigt die "Stetigkeit" der linearen Abbildung

$$F \longmapsto (G_F, H_F, r_{F,i,j} : i,j = 1,\ldots,p) \qquad \text{(vgl. § 4)}$$

(3) Es wird eine stetige lineare "Fortsetzung"

$$\mathcal{E}_U : C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}) \longrightarrow \overline{\mathcal{P}^k} \quad \text{konstruiert}$$

$$f \longmapsto \mathcal{E}_U(f)$$

mit $\mathcal{E}_U(f)(x,\lambda,u,\mu,\bar{u}) = f(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{C}^1$ eine geeignete offene Menge. Dabei ist $\overline{\mathcal{P}^k}$ die Komplettierung von $\mathcal{P}^k$ bzgl. geeigneter Halbnormen (vgl. § 5)

(4) Man dividiert $\mathcal{E}_U(f)$ wie in (1) unter Berücksichtigung von (2) und setzt $w = \bar{u}$, $\mu = \bar{\lambda}$. Die Substition $\lambda_i = a_i(x)$ liefert dann das Resultat. (vgl. § 6)

Am Ende (§ 7) wollen wir zeigen, daß sich einige Aussagen, die bei dem Beweis obigen Resultats benutzt werden, auf zu der Untersuchung von C^k-Funktionen auf analytischen Mengen eignen, und machen eine Bemerkung über C^k-Relationen holomorphen Funktionen (§ 8), die eine Anwendung des reellen Divisionssatzes [4] darstellt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	(i)-(iii)
§ 1 Bezeichnungen (Die Definition der Räume $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n x(\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2)$)	1
§ 2 Die Division im eindimensionalen Fall (nach M.G.Lasalle)	4
§ 3 Die Division in den Räumen $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n x(\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2)$	7
§ 4 Die Stetigkeit der Abbildungen L_k , $\tilde{L}_k$	10
§ 5 Ein Fortsetzungssatz (für C^k - Funktionen)	24
§ 6 Die Division im allgemeinen Fall	37
§ 7 Eine Bemerkung über spezielle schwach holomorphe C^k - Funktionen.	43
§ 8 C^k - Relationen holomorpher Funktionen	49
Literatur	55

1. Bezeichnungen

(1.1) Mit $C^k(U)$, $k \in \mathbb{N}$ bzw. $k = \infty$, für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ bezeichnen wir die $\mathbb{C}$-Algebra der komplexwertigen k-mal stetig differenzierbaren bzw. unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf U.

Sind $x = (x_1,\ldots,x_n)$ Koordinaten des $\mathbb{R}^n$, $z = (z_1,\ldots,z_n)$ solche des $\mathbb{C}^n$, $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$, $\nu = 1,\ldots,n$, x_ν, y_ν reell, so benutzen wir folgende Abkürzungen:

$$D_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n, \ \mathbb{N}_o := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_\nu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - i\,\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + i\,\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right), \quad \nu = 1,\ldots,n$$

$$D_z^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_u}\right)^{\alpha_n}, \quad D_{\bar{z}}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)^{\alpha_n}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_o^n.$$

Für $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ und zu jedem $r \in \mathbb{N}_o$, $r \leq k$, hat man auf $C^k(U)$, U offen $\subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, folgende Halbnorm:

$$||f||_{K,r} := \max_{x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_o^n, |\alpha| \leq r} |D_x^\alpha f(x)| = \max\{|D_x^\alpha f(x)| : x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_o^n, |\alpha| \leq r\}$$

bzw. $$||f||_{K,r} := \max_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_o^n, |\alpha| + |\beta| \leq r, z \in K} |D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta f(z)| .$$

Mit diesen Halbnormen ist $C^k(U)$ eine Frechetalgebra.

$C_o^k(U) \subset C^k(U)$ sei die Unteralgebra der Funktionen aus $C^k(U)$ mit kompaktem Träger.

(1.2) Ist $f : Y \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einer Menge Y, $Y = Y_1 x \ldots . x Y_t$, so bezeichne für

$(y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_t) \in Y_1 x \ldots x \hat{Y}_i x \ldots x Y_t$

$f_{(y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_t)} : Y_i \to \mathbb{C}$ die Funktion mit

$f_{(y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_t)}(y_i) := f(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_t)$, $y_i \in Y_i$. ($i \in \{1, .., t\}$.)

(1.3) Im Folgenden sei $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_p u]$ stets das Polynom $\mathcal{P} = u^p + \lambda_1 u^{p-1} + \ldots + \lambda_p$ und

$X := \{(\lambda, u) \in \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1 : \mathcal{P}(\lambda, u) = 0\}$; $p \in \mathbb{N}$ sei festgehalten.

Definition 1:

Für $k \in \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$ bezeichne $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n x (\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2) \subset C^k(\mathbb{R}^n x (\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2)$

(bzw. $\mathcal{P}_1^k(\mathbb{R}^n x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1) \subset C^k(\mathbb{R}^n x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)$) folgenden $\mathbb{C}$-Untervektorraum:

$F \in C^k(\mathbb{R}^n x (\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2)$ (bzw. $F \in C^k(\mathbb{R}^n x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)$) gehört genau dann zu $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n x (\mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)^2)$ (bzw. zu $\mathcal{P}_1^k = \mathcal{P}_1^k(\mathbb{R}^n x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1)$), wenn es offene Umgebungen $U_F(X)$, $\tilde{U}_F(X) \subset \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1$ von X (bzw. eine offene Umgebung $\hat{U}_F(X) \subset \mathbb{C}^p x \mathbb{C}^1$ von X) gibt mit der Eigenschaft:

Für alle $(x, \lambda, \mu, \omega) \in \mathbb{R}^n x (\mathbb{C}^p)^2 x \mathbb{C}^1$ ist die Funktion $F_{(x,\lambda,\mu,\omega)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf der Projektion

$\pi((\{(x,\lambda)\} x \mathbb{C} x \{(\mu,\omega)\}) \cap (\{x\} x U_F(X) x \{(\mu,\omega)\}))$ und für alle

$(x,\lambda,u,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p$ ist $F_{(x,\lambda,u,\mu)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf

$\tilde{\pi}(\{(x,\lambda,u,\mu)\} \times \mathbb{C}) \cap (\{(x,\lambda,u)\} \times \tilde{U}_F(X))$ (bzw. Für alle

$(x,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ ist $F_{(x,\lambda,\mu)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf

$\hat{\pi}(\{(x,\lambda,\mu)\} \times \mathbb{C}) \cap (\{(x,\lambda)\} \times \hat{U}_F(X))$

$\pi: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 \to \mathbb{C}, \tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 \to \mathbb{C},$

$\hat{\pi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}$ seien dabei die Projektionen

$(x,\lambda,u,\mu,\omega) \overset{\pi}{\longmapsto} u$, $(x,\lambda,u,\mu,\omega) \overset{\pi}{\mapsto} \omega$, $(x,\lambda,\mu,\omega) \overset{\pi}{\mapsto} \omega$.

2. Die Division im eindimensionalen Fall (nach M.G. Lasalle [4], § 2)

(2.1) $D(u) = u^p + a_1 u^{p-1} + \dots + a_p \in \mathbb{C}[u]$ sei ein vorgegebenes Polynom mit $D(u) = \prod_{i=1}^{r} (u-t_i)^{m_i}$, $t_1 \dots t_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.

Weiter sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die holomorph in einer offenen Umgebung $U = U(\{t_1 \dots t_r\})$ der Nullstellenmenge $\{z \in \mathbb{C} : D(z) = 0\}$ ist.

$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ werde so gewählt, daß der Träger von χ (=: T_χ) in U liegt und $\chi(u) \equiv 1$ auf einer Umgebung $V = V(\{t_1 \dots t_r\})$ gilt.

Beachtet man die Identität

$$\frac{D(z)-D(u)}{z-u} = \sum_{i=1}^{p} \{z^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j z^{i-1-j}\} u^{p-i},$$

so ergibt sich: Durch

$$R_{D,\phi}(u) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\phi(z)}{D(z)} \frac{(D(z)-D(u))}{z-u} \, dz \wedge d\bar{z}$$

(2.2)

$$= \sum_{i=1}^{p} \{\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\phi(z)}{D(z)} (z^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j z^{i-1-j}) dz \wedge d\bar{z}\} u^{p-1}$$

$$=: \sum_{i=1}^{p} r_{i,D,\phi} \, u^{p-i} \qquad , u \in \mathbb{C}$$

ist ein Polynom $R_{D,\phi} \in \mathbb{C}[u]$ mit Grad $R_{D,\phi} \leq p-1$ definiert.

(2.3) Nach der Cauchyschen Integralformel und dem Stokeschen Satz hat man für $u \in \chi^{-1}(1)$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$:

$$\phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{||z-u|| = \varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-u}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\, \frac{\phi(z)}{z-u}\, dz \wedge d\bar{z}$$

benutzt man ferner $1 = \frac{D(u)}{D(z)} + \frac{D(z)-D(u)}{D(z)}$ $(D(z) \neq 0)$, so wird

$$\phi(u) = D(u)\left(\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\phi(z)}{D(z)}\, \frac{dz\wedge d\bar{z}}{z-u} + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\phi(z)(D(z)-D(u))}{D(z)\qquad z-u} dz\wedge d\bar{z},\right.$$

$$u \in \overset{\circ}{\chi^{-1}(1)}$$

$G_{D,\phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(2.4) \qquad G_{D,\phi}(u) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(z)\phi(z)}{D(z)}\, \frac{dz\wedge d\bar{z}}{z-u}, & \text{falls } u \notin \overset{\circ}{\chi^{-1}(1)} \\ \frac{\phi(u)-R(u)}{D(u)}, & u \in \mathbb{C} \text{ sonst} \end{cases}$$

ist stetig auf G, holomorph auf U; weiter haben wir auf $\mathbb{C}$:

$$(2.5) \qquad \phi = G_{D,\phi} \cdot D + R_{D,\phi}$$

Durch Differenzieren dieser Formel ergibt sich

(2.6) $R_{D,\phi}$ ist das einzige Polynom $\in \mathbb{C}[u]$ vom Grad $\leq p - 1$ mit:

$$\frac{d^k \phi}{du^k}(t_i) = \frac{d^k R_{D,\phi}}{du^k}(t_i) \quad , 0 \leq k < m_i \; , \; i = 1,\ldots,r$$

Insbesondere ist $R_{D,\phi}$ unabhängig von der Funktion χ mit den genannten Eigenschaften definiert.

$R_{D,\phi}$ heißt das Interpolationspolynom von ϕ über D

3. Die Division in den Räumen $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$.

(3.1) Nach der Definition der Räume $\mathcal{P}^k$ und nach dem in 2. Gesagten ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 2:

Für $F \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ und $(x,\lambda,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$ sei $r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) := r_{\mathcal{P}_\lambda, F(x,\lambda,\mu,\omega), i}$ der i-te Koeffizient des Interpolytionspolynoms $R_{\mathcal{P}_\lambda, F(x,\lambda,\mu,\omega)}$ von $F(x,\lambda,\mu,\omega)$ über $\mathcal{P}_\lambda$ (Bezeichnungen wie in 1.2. und 2.2.)

$G_F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 \to \mathbb{C}$ sei die Funktion mit

$$G_F(x,\lambda,\ ,u,\mu,\omega) := G_{\mathcal{P}_\lambda, F(x,\lambda,\mu,\omega)}(u) \quad , \quad (x,\lambda,u,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$$

Mit den Ergebnissen in 2. und durch Differenzieren unter dem Integralzeichen ergibt sich nun sehr leicht:

Satz 1:

a) Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist durch

$$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \ni F \mapsto L_k(F) := (G_F, r_{F,1}, \ldots, r_{F,p})$$

eine lineare Abbildung

$$L_k : \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \to C^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \times [C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)]^p$$

definiert und es gilt

$$F(x,\lambda,u,\mu,\omega) = \mathcal{P}(\lambda,u) G_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) + \sum_{i=1}^{p} r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) u^{p-i}$$

$$(x,\lambda,u,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2.$$

b) Zu $F \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ sei $U_F(X)$ eine offene Umgebung von X wie in Definition 1.

$\chi \in C^\infty(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$ habe folgende Eigenschaften:

$\chi_\lambda \in C_o^\infty(\mathbb{C})$, $T_r \chi_\lambda \subset \pi(U_F(X) \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}))$, $\chi_\lambda(u) = 1$ in eine Umgebung von $\pi(X \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}))$ $(\pi : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1, (\lambda, u) \mapsto u)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(\lambda,z) F(x,\lambda,z,\mu,\omega)}{P(\lambda,z)} \left(z^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j z^{i-1-j}\right) dz \wedge d\bar{z}$$

$$(x,\lambda,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$$

$$i = 1, \ldots, p$$

$$G_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}(\lambda,z) F(x,\lambda,z,\mu,\omega)}{P(\lambda,z)(z-u)} dz \wedge d\bar{z}, (x,\lambda,u,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C} \\ \text{mit } (\lambda,u) \in \overset{\circ}{\chi^{-1}}(1) \\ \frac{F(x,\lambda,u,\mu,\omega) - \sum_{i=1}^{p} r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) u^{p-i}}{P(\lambda,u)}, (x,\lambda,u,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 \\ \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Für $i = 1, \ldots, p$ ist $r_{F,i} \in \mathcal{P}_1^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$

(3.2) Wegen Teil (c) in Satz 1, nach Definition der Räume $\mathcal{P}_1^k$ und nach dem in 2. Gesagten können wir das oben beschriebene Divisionsverfahren auf $r_{F,i}, i=1,\ldots,p$ anwenden:

$F \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ sei vorgegeben; $\tilde{\chi} \in C^\infty(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$ werde wie in Satz 1.(b) gewählt mit $\tilde{U}_F(X) =: \hat{U}_{r_{F,i}}(X)$ aus Definition 1 anstelle von $U_F(X)$. Dann setzen wir:

Definition 3:

$$r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu) := \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\chi}{\eta}(\mu,\eta)\, r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\eta)}{\Phi(\mu,\eta)} \left(\eta^{j-1} + \sum_{\nu=1}^{j-1} \mu_\nu \eta^{j-1-\nu}\right) d\eta \wedge d\bar{\eta}$$

$i,j = 1,\ldots,p$, $(x,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ und

$$G_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \dfrac{\frac{\partial \chi}{\partial \eta}(\mu,\eta)\, r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\eta)}{P(\mu,\eta)\,(\eta-\omega)} d\eta \wedge d\bar{\eta}, & (x,\lambda,\mu,\omega) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^p\times \\ & \text{mit } (\mu,\omega) \in \widetilde{\chi^{-1}}(1) \\ \dfrac{r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega) - \sum_{j=1}^{p} r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu)\,\omega^{p-j}}{P(\mu,\omega)} & (x,\lambda,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^p \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) := \sum_{i=1}^{p} G_{F,i}(x,\lambda,\mu,\omega)\, u^{p-i} \quad , (x,\lambda,u,\mu,\omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$$

Analog zu Satz 1 können wir notieren:

Satz1':

Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist durch

$$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \ni F \longmapsto (G_F, H_F, r_{F,i,j} : i,j = 1,\ldots,p) =: \widetilde{L}_k(F)$$

eine lineare Abbildung

$$\widetilde{L}_k : \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \longrightarrow (C^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2))^2 \times (C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p))^{p^2}$$

definiert und es gilt für $F \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$, $(x, \lambda u, \mu \omega) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$:

$$F(x,\lambda,u,\mu\omega) = P(\lambda,u)\, G_F(x,\lambda,u,\mu\omega) + P(\mu\omega)\, H_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) + \sum_{i,j=1}^{p} r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu)\, u^{p-i}\omega^{p-j}$$

4. Die Stetigkeit der Abbildungen L_k, $\tilde{L}_k$

Als Hauptergebnis in diesem Abschnitt wollen wir die Stetigkeit von $\tilde{L}_k$, $k \geq 2p$, in folgendem Sinne nachweisen:

Satz 2:

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2p$, und zu allen kompakten Teilmengen $K_1 \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$, $K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ gibt es reelle Konstanten $M_1(k,K_1)$, $M_2(k,K_1)$, $M_3(k,K_2) > 0$ sowie kompakte Mengen $K_1', K_1'', K_2' \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ mit folgender Eigenschaft:
Für jeden Multiindex $(\alpha,\beta,\tilde{\beta},\gamma,\tilde{\gamma},\delta,\tilde{\delta},\varepsilon,\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N}_0^n \times (\mathbb{N}_0^{2p} \times \mathbb{N}_0^2)^2$
mit

$$|\alpha| + p(1+|\beta|) + |\tilde{\beta}| + \gamma + \tilde{\gamma} + |\delta + \tilde{\delta}| + \varepsilon + \tilde{\varepsilon} \leq k$$

bzw. $|\alpha| + p(2+|\beta+\delta|) + |\tilde{\beta} + \tilde{\delta}| + \varepsilon + \tilde{\varepsilon} + \gamma + \tilde{\gamma} \leq k$
gilt

$$\max \left| D_x^\alpha D_\lambda^\beta D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\beta}} D_u^\gamma D_{\bar{u}}^{\tilde{\gamma}} D_\mu^\delta D_{\bar{\mu}}^{\tilde{\delta}} D_\omega^\varepsilon D_{\bar{\omega}}^{\tilde{\varepsilon}} G_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) \right| \leq M_1(k,K_1) \cdot ||F||_{k,K_1'}$$

$(x,\lambda,u,\mu,\omega) \in K_1$

bzw.

$$\max \left| D_x^\alpha D_x^\beta D_\lambda^\beta D_u^\gamma D_u^\gamma D_\mu^\delta D_\mu^\delta D_\omega^\varepsilon D_\omega^\varepsilon H_F(x,\lambda,u,\mu,\omega) \right| \leq M_2(k,K_1) \cdot ||F||_{k,K_1''}$$

$(x,\lambda,u,\mu,\omega) \in K_1$

für alle $F \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$–und für jeden Multiindex $(\alpha,\beta,\tilde{\beta},\delta,\tilde{\delta}) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^{4p}$ mit $|\alpha| + p(2+|\beta+\delta|) + |\tilde{\beta} + \tilde{\delta}| - 2 \leq k$
haben wir:

$$\max \left| D_x^\alpha D_\lambda^\beta D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\beta}} D_\mu^\delta D_{\bar{\mu}}^{\tilde{\delta}} r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu) \right| \leq M_3(k,K_2) \cdot ||F||_{k,K_2'}$$

$(x,\lambda,\mu) \in K_2$

für alle $F \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ und $i,j = 1,\ldots,p$.

(4.1) Vor dem Beweis müssen wir einige Vorbereitungen treffen und einige Aussagen aus [4] , § 3 verallgemeinern bzw. übernehmen.

$W \subset \mathbb{C}$ bezeichne i. F. stets eine achsenparallelen Würfel mit $0 \in \mathbb{C}$ als Mittelpunkt:

$W = \{u \in \mathbb{C} : -r < \operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u < +r\}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, geeignet;

weiter sei $\frac{1}{2} W = \{u \in \mathbb{C} : -\frac{r}{2} < \operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u < +\frac{r}{2}\}$.

Lemma 1:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine reelle Konstante $M_k = M_k(W)$ mit der Eigenschaft:

Ist ϕ eine C^k-Funktion in einer Umgebung U von $\frac{1}{2}\overline{W}$, holomorph in einer Umgebung eines Punktes $t_o \in \frac{1}{2}\overline{W}$ und wird definiert:

$$\psi(u) := \begin{cases} \frac{\phi(u)-\phi(t_o)}{u-t_o} & , u \in U, u \neq t_o \\ \frac{d\phi}{du}(t_o) & , u = t_o \end{cases}$$

so gilt: $\psi \in C^k(U)$, ψ ist holomorph in einer Umgebung von t_o und es ist

$$||\psi||_{k-1,\frac{1}{2}\overline{W}} \leq M_k \cdot ||\phi||_{k,\frac{1}{2}\overline{W}}$$

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine reelle Konstante $\widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(W)$ mit der Eigenschaft:

Ist ϕ eine C^k-Funktion in einer Umgebung U von $(\frac{1}{2}\overline{W})^2$ $t_o \in \frac{1}{2}\overline{W}$, so daß ϕ holomorph bzgl. u (bzw. ω) in einer Umgebung von

$(\{z_0\} \times E) \cap T$ (bzw. $(E \times \{w_0\}) \cap T$) ist, und wird definiert:

$$\varphi(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z,w) - f(z_0,w)}{z - z_0}, & (z,w) \in T,\ z \neq z_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0,w), & (z_0,w) \in T \end{cases}$$

$$\text{bzw.}\quad \psi(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z,w) - f(z,w_0)}{w - w_0}, & (z,w) \in T,\ w \neq w_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial w}(z,w_0), & (z,w_0) \in T \end{cases}$$

so gilt: $\varphi \in C^{(k-1)}(T)$, φ ist holomorph bzgl. w (bzw. z) in einer Umgebung von $(\{z_0\} \times E) \cap T$ (bzw. $(E \times \{w_0\}) \cap T$) und

$$\|\varphi\|_{k-1,\ \frac{1}{2}E \times \frac{1}{2}E} \leq c_k \cdot \|f\|_{k,\ \frac{1}{2}E \times \frac{1}{2}E}.$$

Der Beweis von (a) findet sich in [illegible] § 3 und basiert auf der Taylorformel

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0))\,dt + \overline{(z - z_0)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0 + t(z - z_0))\,dt.$$

Benutzt man etwa

$$f(z,w) - f(z_0,w) = (z - z_0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0), w)\,dt + \overline{(z - z_0)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0 + t(z - z_0), \ldots$$

We recall also the following notation:

(5.2) The closed cylinder $\bar{Z} = \bar{W}^1 \times \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{C}^{n_3} \times \mathbb{C}^{n_4}$ (where $\bar{W}^1 \subset \mathbb{C}^{n_1}$) and the closed cylinder $\bar{W} = \bar{W}^1 \times \bar{W}^2 \subset \mathbb{C}^n$ (where $\bar{W}^2 \subset \mathbb{C}^{n_2}$) will be considered.

With $\{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subset \bar{Z}$, $\delta \in \mathbb{R}$ and $\{\lambda_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ we have $\{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subset \bar{W}$, $\delta < \beta$ and $\lambda(\nu) = 0$ where $\nu \in \mathbb{N}$ and $\lambda(\nu) = \lambda_\nu$, we have $\delta \leq \frac{1}{2}\beta$ where $\{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subset \frac{1}{2}\bar{W} \times \frac{1}{2}\bar{W}_1$.

We assume now the following:

Lemma 1:

Let $\alpha, m \in \mathbb{N}$ and $\alpha \neq 0$ and $G \in \mathcal{O}_{\alpha,m}(\bar{W}^1 \times \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{C}^{n_3} \times \mathbb{C}^{n_4}, \mathbb{C})$ and $G \in \mathcal{O}_{\alpha,m}(\bar{W}^1 \times \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{C}^{n_3} \times \mathbb{C}^{n_4}, \mathbb{C})$. Then

$$\max_{0 \leq \gamma + \tau \leq \alpha} |D_0^\gamma D_1^\tau G(x_1, \ldots, x_{n_1})| \leq$$

$$(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \bar{W}^1, \ \delta \leq \frac{1}{2}\beta$$

$$\leq \max_{0 \leq \gamma + \tau \leq \alpha + m\rho} |D_0^\gamma D_1^\tau \prod_{\nu=1}^{m} [x_1 - \lambda(\nu)]^\rho G(x_1, \ldots, x_{n_1})|$$

$$(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \bar{W}^1, \ \delta \leq \frac{1}{2}\beta$$

then

$$\max_{0 \leq \gamma + \tau \leq \alpha} |D_0^\gamma D_1^\tau G(x_1, \ldots, x_{n_1})| \leq$$

$$(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \bar{W}^1$$

$$\leq \frac{1}{2}\beta$$

$$M_{l+1} \cdots M_{l+m\cdot p} \quad \max_{\substack{0 \le \varepsilon + \tilde{\varepsilon} \le 1 + mp \\ (x,\lambda,\mu) \in \tilde{K},\, \omega \in \frac{1}{2}\tilde{\tilde{W}}}} \left| D_{\omega}^{\varepsilon} D_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\varepsilon}} \left([P(\mu,\omega)]^{m} G)(x,\lambda,\mu,\omega) \right| \right.$$

b) Für jedes Paar $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $m = m_1 + m_2$:

$$\max_{\substack{0 \le \gamma + \tilde{\gamma} + \varepsilon + \tilde{\varepsilon} \le 1 \\ (x,\lambda,\mu) \in \tilde{K},\, (u,\omega) \in \frac{1}{2}\tilde{\tilde{W}} \times \frac{1}{2}\tilde{\tilde{W}}}} \left| D_u^{\gamma} D_{\tilde{u}}^{\tilde{\gamma}} D_{\omega}^{\varepsilon} D_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\varepsilon}} G(x,\lambda,u,\mu,\omega) \right| \le$$

$$\widetilde{M}_{l+1} \cdots \widetilde{M}_{l+mp} \quad \max_{\substack{0 \le \gamma + \tilde{\gamma} + \varepsilon + \tilde{\varepsilon} \le 1 + m\cdot p \\ (x,\lambda,\mu) \in \tilde{K},\, (u,\omega) \in \frac{1}{2}\tilde{\tilde{W}} \times \frac{1}{2}\tilde{\tilde{W}}}} \left| D_u^{\gamma} D_{\tilde{u}}^{\tilde{\gamma}} D_{\omega}^{\varepsilon} D_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\varepsilon}} \left([P(\lambda,u)]^{m_1} [P(\mu,\omega)]^{m_2} G)(x,\lambda,u\mu,\omega) \right| \right.$$

Der Beweis von a) verläuft genau wie in [4], § 3 mit Hilfe von Lemma 1. a.

Zu b): Sei $(x_o, \lambda_o, \mu_o) \in \tilde{K}$ fest und

$$P(\lambda_o,u)^{m_1} = \prod_{j=1}^{m_1 p} (u - t_j) \,, \quad P(\mu_o,\omega) = \prod_{j=m_1 p+1}^{mp} (\omega - t_j)$$

Werde definiert:

$$\psi_i(u,\omega) := \begin{cases} \dfrac{P(\lambda_o,u)^{m_1} P(\mu_o,\omega)^{m_2} G(x_o,\lambda_o,u,\mu_o,\omega)}{\prod_{j=1}^{i} (u - t_j)} \,, & i = 0,\ldots,m_1 p \\[2ex] \dfrac{P(\mu_o,\omega)^{m_2} G(x_o,\lambda_o,u,\mu_o,\omega)}{\prod_{j=m_1 p+1}^{i} (\omega - t_j)} \,, & i = m_1 p+1,\ldots,mp \end{cases}$$

Es folgt: $\psi_o(u,\omega) = P(\lambda_o,\omega)^{m_1} P(\mu_o,\omega)^{m_2} F(x_o,\lambda_o,u,\mu_o,\omega)$

$$\psi_{mp}(u,\omega) = F(x_o,\lambda_o,u,\mu_o,\omega)$$

$$\psi_i(t_{i+1},\omega) = 0 \quad , \quad i = 0,\dots,m_1p-1$$

$$\psi_i(u,t_{i+1}) = 0 \quad , \quad i = m_1p,\dots,mp$$

und daher

$$\psi_i(u,\omega) = \begin{cases} \dfrac{\psi_i(u,\omega)}{u-t_{i+1}} = \dfrac{\psi_i(u,\omega) - \psi_i(t_{i+1},\omega)}{u-t_{i+1}} & , \ i = 0,\dots,m_1p-1 \\ \dfrac{\psi_i(u,\omega) - \psi_i(u,t_{i+1})}{\omega-t_{i+1}} & , \ i = m_1p,\dots,mp-1 \end{cases}$$

Sukzessive Anwendung von Lemma 1, (b) ergibt dann (b) .

(4.3) Nützlich für die folgenden Abschätzungen sind die wie folgt definierten Größen:

Definition 3:

a) Sind $t_1,\dots,t_m \in \mathbb{C}$, ist $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in einer Umgebung V von $\{t_1,\dots,t_m\}$, ist ferner $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Tr}\chi \subset V$ und $\chi(u) = 1$ in einer Umgebung von $\{t_1,\dots,t_m\}$, so sei

$$A(\phi,t_1,\dots,t_m) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(z)\,\phi(z)}{\prod_{i=1}^{m}(z-t_i)}\, dz\wedge d\bar{z} \ .$$

b) Sind $t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r \in \mathbb{C}$, ist $\phi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und gibt es Umgebungen U_1 von $\{t_1,\dots,t_m\}$, U_2 von $\{\tau_1,\dots,\tau_r\}$ in $\mathbb{C}$, so daß für alle $w\in\mathbb{C}$ (bzw. $u\in\mathbb{C}$) ϕ_w (bzw. ϕ_u) holomorph auf $\pi_1(U_1\times\{w\})$ (bzw. auf $\pi_2(\{u\}\times U_2)$) ist, - $\pi_i:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $i=1,2$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor -, ist ferner $\chi\in C_o^\infty(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Tr}\chi\subset U_1$, $\chi(u)=1$ in einer Umgebung von $\{t_1,\dots,t_m\}$ (bzw. $\tilde\chi\in C_o^\infty(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Tr}\tilde\chi\subset U_2$, $\tilde\chi(w)=1$ in einer Umgebung von $\{\tau_1,\dots,\tau_r\}$), so sei

$$\tilde A(\phi,t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r) := \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\mathbb{C}\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar\xi}(z)\frac{\partial\tilde\chi}{\partial\bar\eta}(\eta)\phi(z,\eta)}{\prod_{\nu=1}^{m}(z-t_\nu)\prod_{\nu=1}^{r}(\eta-\tau_\nu)}\, dz\wedge d\bar z\, d\eta\wedge d\bar\eta$$

$A(\phi,t_1,\dots,t_m)$ ist also der Koeffizient des Termes $(p-1)$-ten Grades des Interpolationspolynoms von ϕ über $D(u)=\prod_{i=1}^{m}(u-t_i)$; für diesen sowie für $\tilde A(\phi,t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r)$ gilt folgende Beziehung, die bei Induktionsschlüssen nützlich ist:

Lemma 3:

(a) Sind $t_1,\dots,t_m\in\mathbb{C}$, $m>1$, hat $\varphi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ die Eigenschaften wie in Definition 3.a. und wird definiert:

$$\psi(u) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(u)-\varphi(t_m)}{u-t_m}, & u\in\mathbb{C}-\{t_m\} \\ \dfrac{d\varphi}{du}(t_m), & u=t_m \end{cases}$$

so gilt: $A(\varphi,t_1,\dots,t_m)=A(\varphi,t_1,\dots,t_{m-1})$

(b) Sind $t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r\in\mathbb{C}$, $m>1$ (bzw. $r>1$) und hat $\varphi:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}$ die Eigenschaften wie in Definition 3.b., so gilt mit

$$\psi(u,w) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(u,w)-\varphi(t_m,w)}{u-t_m}, & (u,w)\in\mathbb{C}^2, u\neq t_m \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(t_m,w), & (u,w)\in\mathbb{C}^2, u=t_m \end{cases}$$

(bzw. $\psi(u,w) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(u,w)-\varphi(u,\tau_\nu)}{w-\tau_\nu}, & (u,w)\in\mathbb{C}^2, w\neq\tau_\nu \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}(u,\tau_\nu), & (u,w)\in\mathbb{C}^2, w=\tau_\nu \end{cases}$)

die Beziehung:

$$\tilde{A}(\varphi,t_1,..,t_m,\tau_1,..,\tau_r)=\tilde{A}(\psi,t_1,..,t_{m-1},\tau_1,..,\tau_r)$$
$$(\text{bzw. } \tilde{A}(\varphi,t_1,..,t_m,\tau_1,..,\tau_r)=\tilde{A}(\psi,t_1,..,t_m,\tau_1,..,\tau_{r-1}) \quad)$$

Beweis: Den Beweis zu (a) entnehmen wir [4],§3.

(b) läßt sich wie folgt auf (a) zurückführen:

Für $w\in\mathbb{C}$ erfüllt $\varphi_w:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ die Voraussetzungen in (a), also ist:

$$A(\varphi_w,t_1,..,t_m)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(z)\varphi(z,w)}{\prod_{i=1}^{m}(z-t_i)}dz\wedge d\bar{z} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(z)\psi(z,w)}{\prod_{i=1}^{m-1}(z-t_i)}dz\wedge d\bar{z}=A(\psi_w,t_1,..,t_{m-1})$$

$w\longmapsto A(\varphi_w,t_1,..,t_m)$ definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$, holomorph in einer Umgebung von $\{\tau_1,..,\tau_r\}$. Daher liefert Integration der Gleichung

$$\frac{\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\bar{\eta}}(\eta)}{\prod_{i=1}^{r}(\eta-\tau_i)}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(z)\varphi(z,\eta)}{\prod_{i=1}^{m}(z-t_i)}dz\wedge d\bar{z}=\frac{\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\bar{\eta}}(\eta)}{\prod_{i=1}^{r}(\eta-\tau_i)}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(z)\psi(z,\eta)}{\prod_{i=1}^{m-1}(z-t_i)}dz\wedge d\bar{z}$$

die Behauptung (b).

Lemma 4:

(a) Zu jedem $m\in\mathbb{N}$ und jedem Würfel $W\subset\mathbb{C}^1$ gibt es eine reelle Konstante $L_m(W)>0$ mit der Eigenschaft:

Sind $t_1,..,t_m\in\frac{1}{2}\bar{W}$, ist $\varphi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ eine C^{m-1}-Funktion und holomorph

in einer Umgebung von $\{t_1,\dots,t_m\}$ dann gilt:

$$|A(\varphi,t_1,\dots,t_m)| \leq L_m(W)\|\varphi\|_{m-1,\frac{1}{2}\bar{W}} .$$

(b) Zu jedem $(m,r)\in N^2$ und jedem Würfel $W\subset\mathbb{C}^1$ gibt es eine reelle Konstante $L_{m,r}(W) > 0$ mit der Eigenschaft:
Sind $t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r \in \frac{1}{2}\bar{W}$, ist $\varphi:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ eine C^{m+r-2}-Funktion mit den in Definition 3 genannten Eigenschaften, dann gilt:

$$|\tilde{A}(\varphi,t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r)| \leq L_{m,r}(W)\cdot\|\varphi\|_{m+r-2,\frac{1}{2}\bar{W}x\frac{1}{2}\bar{W}} .$$

Beweis: Der Beweis von (b) verläuft ähnlich der von (a) in [4], durch Induktion nach m+r:
Sei m=r=1; dann folgt mit der Cauchyschen Integralformel und dem Satz von Stokes: $\tilde{A}(\varphi,t_1,\tau_1)=\varphi(t_1,\tau_1)$. Sei also $L_{1,1}(W):=1$.
Der Induktionsschluß: Nach Lemma 3.b. und nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$|\tilde{A}(\varphi,t_1,\dots,t_{m+1},\tau_1,\dots,\tau_r)| = |\tilde{A}(\psi,t_1,\dots,t_m,\tau_1,\dots,\tau_r)| \leq$$

$$L_{m,r}(W)\cdot\|\psi\|_{m+r-2,\frac{1}{2}\bar{W}x\frac{1}{2}\bar{W}}$$

wobei ψ wie dort definiert ist. Nach Lemma 1.b. ist ferner

$$\|\psi\|_{m+r-2,\frac{1}{2}\bar{W}x\frac{1}{2}\bar{W}} \leq \tilde{M}_{m+r-1}(W)\|\varphi\|_{m+r-1,\frac{1}{2}\bar{W}x\frac{1}{2}\bar{W}} .$$

Mit $L_{m+1,r}(W):=L_{m,r}(W).\tilde{M}_{m+r-1}(W)$ gilt also (b) für (m+1,r) .

Zu einer kompakten Menge $K\subset\mathbb{R}^n x\mathbb{C}^p x\mathbb{C}^p x\mathbb{C}^1$ (bzw. $\tilde{K}\subset\mathbb{R}^n x\mathbb{C}^p x\mathbb{C}^p$) wählen wir $W\subset\mathbb{C}$ (bzw. $\tilde{W}\subset\mathbb{C}$) wie unter 4.2. beschrieben. Dann gilt:

Lemma 5:

(a) Ist $G\in\mathcal{B}^{m.p-1}(\mathbb{R}^n x(\mathbb{C}^p x\mathbb{C}^1)^2)$, so gilt:

$$\max_{(x,\lambda,\mu,w)\in K}\left|\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(\lambda,z)G(x,\lambda,z,\mu,w)}{P(\lambda,z)^m}dz\wedge d\bar{z}\right| \leq$$

$$L_{pm}(W)\max_{0\leq c+\tilde{c}\leq pm-1,(x,\lambda,\mu,w)\in K}\left|D_u^c D_{\bar{u}}^{\tilde{c}}\,G(x,\lambda,u,\mu,w)\right| ,u\in\frac{1}{2}\bar{W}$$

(b) Für $G \in \mathcal{P}^{mp-2}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$, $m=m_1+m_2$, $(m_1,m_2) \in \mathbb{N}^2$ gilt:

$$\max_{(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K}} \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \iiint_{\mathbb{C}\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\bar{\eta}}(\mu,\eta)\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(\lambda,z)G(x,\lambda,z,\mu,\eta)}{P(\lambda,z)^{m_1}P(\mu,\eta)^{m_2}} dz\wedge d\bar{z}d\eta\wedge d\bar{\eta} \right| \leq$$

$$L_{pm_1,pm_2}(W) \max_{\substack{o\leq c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\leq pm-2 \\ (x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},(u,w)\in\frac{1}{2}\tilde{W}\times\frac{1}{2}\tilde{W}}} \left| D_u^c D_{\bar{u}}^{\tilde{c}} D_w^e D_{\bar{w}}^{\tilde{e}} G(x,\lambda,u,\mu,w) \right|$$

($\chi, \tilde{\chi}$ haben die in 3. beschriebene Bedeutung bzgl. G)

Beweis: Es werde $(x,\lambda,\mu,w)\in K$ (bzw. $(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K}$) fest gewählt und Lemma 4 angewandt auf $\varphi(u)=G(x,\lambda,u,\mu,w)$ (bzw. $\varphi(u,w)=G(x,\lambda,u,\mu,w)$), wenn $t_1,..,t_{pm}$ (bzw. $t_1,...,t_{pm_1}, \tau_1,..,\tau_{pm_2}$) die Wurzeln von $P(\lambda,u)^m$ (bzw. $P(\lambda,u)^{m_1}P(\mu,w)^{m_2}$) sind.
(Die Voraussetzungen sind nach Definition der Räume $\mathcal{P}^k$ und nach Wahl von W(K) bzw. $\tilde{W}(\tilde{K})$ erfüllt.) _

Damit haben wir die Hilfsmittel, um Satz 2 beweisen zu können:

(4.4) Beweis zu Satz 2:

(i) Die Abschätzungen für $r_{F,i,j}$, $i,j=1,...,p$:

Nach Satz 1.b. und Definition 3 gilt:

$$r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\iiint_{\mathbb{C}\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\bar{\eta}}(\mu,\eta)\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}(\lambda,z)G_{i,j}(x,\lambda,z,\mu,\eta)}{P(\mu,\eta)P(\lambda,z)} dz\wedge dz d\eta\wedge d\bar{\eta}$$

wobei wir festsetzen:

$$b_{i,j}(\lambda,z,\mu,\eta)=(z^{i-1}+\sum_{\nu=1}^{i-1}\lambda_\nu z^{i-1-\nu})(\eta^{j-1}-\sum_{\nu=1}^{j-1}\mu_\nu\eta^{j-1-\nu}),$$

$$G_{i,j}:=F\cdot b_{i,j},\ i,j=1,....,p$$

Es folgt $G_{i,j}\in\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^1)^2)$, $i,j=1,...,p$.

Für jeden Multiindex $(b,\tilde{b},d,\tilde{d}) \in (\mathbb{N}_0^p)^4$ mit $|b|+|\tilde{b}|+|d|+|\tilde{d}|>0$ folgt wegen $D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b}\chi \equiv 0$ (bzw. $D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d}\tilde\chi \equiv 0$) in einer Umgebung von X mittels Cauchyschem Integralsatz und Stokeschem Satz:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}\ \mathbb{C}} \frac{\frac{\partial}{\partial\bar\eta} D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d}\tilde\chi(\mu,\eta)\,\frac{\partial}{\partial\bar z} D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b}\chi(\lambda,z)\,G_{i,j}(x,\lambda,z,\mu,\eta)}{P(\mu,\eta)\ P(\lambda,z)}\, dz\wedge d\bar z d\eta\wedge d\bar\eta \equiv 0$$

und daher haben wir für jeden Multiindex

$(a,b,\tilde b,d,\tilde d)\in \mathbb{N}_0^n\times(\mathbb{N}_0^p)^4$ mit $|a|+|b+\tilde b+d+\tilde d| \le k$:

$$D_x^a D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b} D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d}\, r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu) =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_{\mathbb{C}\ \mathbb{C}}\iint \frac{\partial\tilde\chi}{\partial\bar\eta}(\mu,\eta)\,\frac{\partial\chi}{\partial\bar z}(\lambda,z)\,D_\lambda^b D_\mu^d \left\{\frac{D_x^a D_{\bar\lambda}^{\tilde b} D_{\bar\mu}^{\tilde d} G_{i,j}(x,\lambda,z,\mu,\eta)}{P(\mu,\eta)\ P(\lambda,z)}\right\} dz\wedge d\bar z d\eta\wedge d\bar\eta$$

Zur Abkürzung setzen wir: $G = D_x^a D_\lambda^{\tilde b} D_\mu^{\tilde d} G_{i,j}$

Genau wie in Lemma 6 aus [4], §3 zeigt man:

$$G\in \mathcal{S}^{k-|a|-|\tilde b+\tilde d|}\left(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^1)^2\right)$$

Nach der Leibnitzschen Regel und nach der Regel für die Differentiation eines Qotienten gilt:

$$D_\lambda^b D_\mu^d\left(\frac{G}{P(\lambda,u)\ P(\mu,w)}\right) = \sum_{\substack{b'+b''=b\\ d'+d''=d}} \frac{G_{b',d'}}{P(\lambda,u)^{1+|b''|}\,P(\mu,w)^{1+|d''|}}$$

mit geeigneten Funktionen $G_{b',d'}\in \mathcal{S}^{k-|a|-|\tilde b+\tilde d|-|b'+d'|}\left(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^1)^2\right)$.

Zu der kompakten Menge $\tilde K \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^p$ wählen wir $\tilde W \subset \mathbb{C}$ wie in 4.2 und erhalten mit Lemma5.b.:

$$\max_{(x,\lambda,\mu)\in\tilde K}\left|\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_{\mathbb{C}\ \mathbb{C}}\iint \frac{\frac{\partial\tilde\chi}{\partial\bar\eta}(\mu,\eta)\,\frac{\partial\chi}{\partial\bar z}(\lambda,z)\,G_{b',d'}(x,\lambda,z,\mu,\eta)}{P(\lambda,z)^{1+|b''|}\,P(\mu,\eta)^{1+|d''|}}\, dz\wedge d\bar z d\eta\wedge d\bar\eta\right| \le$$

$$L_{p(1+|b''|),\,p(1+|d''|)}(\tilde{W})\max_{\substack{0\le c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\le p(2+|b''+d''|)-2\\(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,(u,w)\in\frac{1}{2}\tilde{W}x\frac{1}{2}\tilde{W}}}\left|D_u^cD_{\tilde{u}}^{\tilde{c}}D_w^eD_{\tilde{w}}^{\tilde{e}}G_{b',d'}(x,\lambda,u,\mu,w)\right|$$

Man beachte dabei, daß $G_{b',d'}\in\mathcal{S}^{p(2+|b''+d''|)-2}(\mathbb{R}^n x(\mathbb{C}^p x\mathbb{C}^1)^2)$ gilt, falls $p(2+|b''+d''|)-2\le k-(|a|+|\tilde{b}+\tilde{d}|+|b'+d'|)$ erfüllt ist; dies gilt aber unter der Voraussetzung: $|a|+p(2+|b+d|)+|\tilde{b}+\tilde{d}|-2\le k$, wie sie bei der Abschätzung für $r_{F,i,j}$ in Satz 2 verlangt wird.

Für die Funktionen $G_{b',d'}$ haben wir Abschätzungen folgender Art:

(Denn sie sind ganzzahlige Linearkombinationen von Ausdrücken der Form: $D_\lambda^{\tilde{b}}D^{\tilde{d}'}G\;D_\lambda^{\tilde{\tilde{b}}}P(\lambda,u)D_\mu^{\tilde{\tilde{d}}}P(\mu,w)$ mit $\tilde{b}'\le b,\tilde{d}'\le d'$)

$$\max_{\substack{0\le c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\le p(2+|b'+d''|)-2\\(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,(u,w)\in\frac{1}{2}\tilde{W}x\frac{1}{2}\tilde{W}}}\left|D_u^cD_{\tilde{u}}^{\tilde{c}}D_w^eD_{\tilde{w}}^{\tilde{e}}\,G_{b',d'}(x,\lambda,u,\mu,w)\right|\le$$

$$C_{b',d'}(\tilde{K},\tilde{W})\max_{\substack{0\le c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\le p(2+|b''+d''|)-2,\,\tilde{b}'\le b',\tilde{d}'\le d'\\(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,(u,w)\in\frac{1}{2}\tilde{W}x\frac{1}{2}\tilde{W}}}\left|D_u^cD_{\tilde{u}}^{\tilde{c}}D_\lambda^{\tilde{b}'}D_\mu^{\tilde{d}'}D_w^eD_{\tilde{w}}^{\tilde{e}}\,G(x,\lambda,u,\mu,w)\right|$$

mit reellen Konstanten $C_{b',d'}$, die nicht von G abhängen.

Wird nun $|a|+p(2+|b+d|)+|\tilde{b}+\tilde{d}|-2\le k$ wie in Satz 2 vorausgesetzt, so ergibt sich mit $G=D_x^aD_\lambda^{\tilde{b}}D_\mu^{\tilde{d}}G_{i,j}$ und mit $|a|+|\tilde{b}+\tilde{d}|+|\tilde{\tilde{b}}+\tilde{\tilde{d}}|+c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\le k$ wegen $\tilde{b}'\le b',\tilde{d}'\le d',b=b'+b'',d=d'+d'',c+\tilde{c}+e+\tilde{e}\le p(2+|b''+d''|)-2$ durch Zusammensetzen obiger Ungleichungen sofort die in Satz 2 verlangte Abschätzung für $r_{F,i,j}$, $i,j=1,\dots,p$.

(ii) Benutzt man in (i) statt Lemma 5.b. den Teil a von Lemma 5, so folgt wie in [4], §3 bzw. wie in (i):

Zujedem $k\in\mathbb{N},k\ge 2p$, und zu jeder kompakten Menge $K\subset\mathbb{R}^nx\mathbb{C}^px\mathbb{C}^px\mathbb{C}^1$ gibt

es reelle Konstanten $M(k,K) > 0$ mit der Eigenschaft:

Erfüllt ein Multiindex $(a,b,\tilde{b},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) \in N_0^n \times (N_0^p)^4 \times N_0^2$ die Ungleichung $|a| + p(\ldots + |b| \ldots + |\tilde{b}| + |d+\tilde{d}| + e + \tilde{e} - 1 \leq k$, so gilt für alle $F \in \mathcal{J}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1, ^2), i=1, \ldots, p$:

$$\max |D_x^a D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} D_w^e D_{\bar{w}}^{\tilde{e}} r_{F,i}(x,\lambda,\mu,w)| \leq M(k,K) \| F \|_{k,K'} \quad \text{mit}$$
$(x,\lambda,\mu,w) \in K$

$K' := \{(x,\lambda,u,\mu,w) : (x,\lambda,\mu,w) \in K, u \in \frac{1}{2}\tilde{W}\}$, $\tilde{W} = \tilde{W}(K)$ wie in 4.2 bestimmt.

<u>(iii) Die Abschätzungen für H_F:</u>

Es war $H_F(x,\lambda,u,\mu,w) = \sum_{i=1}^{p} G_{F,i}(x,\lambda,\mu,w) u^{p-i}$ und

$$r_{F,i}(x,\lambda,\mu,w) = P(\mu,w) \ldots_{F,i}(x,\lambda,\mu,w) + \sum_{j=1}^{p} r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu) w^{p-j},$$

$G_{F,i} \in \mathcal{J}_1^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$; es reicht also $G_{F,i}$, $i=1,\ldots,p$, abzuschätzen; ferner reicht es, kompakte Mengen der Form $\tilde{K} \times \frac{1}{2}\tilde{W}$, $\tilde{K}$ kompakt aus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, $\tilde{W} = \tilde{W}(\tilde{K})$ wie in 4.2, zu betrachten; denn auf $\tilde{K} \times (\mathbb{C} - \frac{1}{2}\tilde{W})$ gilt nach Wahl von $\tilde{W}(\tilde{K})$:

$$G_{F,i}(x,\lambda,\mu,w) = \frac{r_{F,i}(x,\lambda,\mu,w) + \sum_{j=1}^{p} r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu) w^{p-j}}{P(\mu,w)}$$

und man kann (i), (ii) direkt anwenden.

Im Folgenden sei $(a,b,\tilde{b},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) \in N_0^n \times (N_0^p)^4 \times N_0^2$ ein Multiindex mit: $|a| + p(2 + |b+d|) + |\tilde{b}+\tilde{d}| + e + \tilde{e} \leq k$.

1.Fall: Sei $d=0$

Es ist $P(\mu,w) D_x^a D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} G_{F,i} = D_x^a D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} r_{F,i} + \sum_{j=1}^{p} D_x^a D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} r_{F,i,j} w^{p-j}$

Wenden wir Lemma 2.a an auf $D_x^a D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} G_{F,i} \in \mathcal{J}_1^{(e+\tilde{e}+1)p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$

so erhalten wir: $\max_{(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,w\in\frac{1}{2}\tilde{\bar{W}}} \left| D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^{\tilde{d}} D_w^e D_{\tilde{w}}^{\tilde{e}}\, G_{F,i}(x,\lambda,\mu,w)\right| \leq$

$$M_{e+\tilde{e}+1}\cdot\ldots\cdot M_{\tilde{e}+\tilde{e}+p} \max_{\substack{0\leq e'+\tilde{e}'\leq e+\tilde{e}+p\\ (x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,w\in\frac{1}{2}\tilde{\bar{W}}}} \left| D_w^{e'} D_{\tilde{w}}^{\tilde{e}'}(P(\mu,w))\; D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^{\tilde{d}} G_{F,i}(x,\lambda,\mu,w)\right| \leq$$

$$M_{e+\tilde{e}+1}\cdot\ldots\cdot M_{e+\tilde{e}+p} \Big(\max_{\substack{0\leq e'+\tilde{e}'\leq e+\tilde{e}+p\\ (x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,w\in\frac{1}{2}\tilde{\bar{W}}}} \left| D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^{\tilde{d}} D_w^{e'} D_{\tilde{w}}^{\tilde{e}'}\, r_{F,i}(x,\lambda,\mu,w)\right| +$$

$$\sum_{j=1}^{p} \max_{\substack{e'\leq\tilde{e}+e+p,\,(x,\lambda,\mu)\in\tilde{K},\,w\in\frac{1}{2}\tilde{\bar{W}}}} \left| D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^{\tilde{d}}\, r_{F,i,j}(x,\lambda,\mu)\;\; D_w^{e'}(w^{p-j})\right| \Big)$$

Die oben gemachte Voraussetzung an $(a,b,\tilde{b},d,\tilde{d},e,\tilde{e})$ impliziert:

$|a|+p(1+|b|+|\tilde{b}|+\tilde{d}+e+\tilde{e}-1\leq k,\ |a|+p(2+|b|)+|\tilde{b}|+|\tilde{d}|-2\leq k$; somit sind (i) und (ii) anwendbar und aus den letzten Abschätzungen ergibt sich die verlangte Abschätzung für H_F im Fall $d=0$.

2.Fall: $|d|>0$

Es ist $D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}}(G_{F,1}P(\mu,w)) = (D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}} G_{F,1})\,P(\mu,w) +$

$\sum_{d'\leq d}\binom{d}{d'} D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^{d'} D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}} G_{F,1}\, D_\mu^{d-d'} P(\mu,w) = D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}} r_{F,i} -$

$\sum_{j=1}^{p} D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}} r_{F,i,j}\, w^{p-j}$;ein Induktionsschluß liefert daher mit Lemma 2.a.-angewandt auf $D_x^a D_\lambda^b D_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{b}} D_\mu^d D_{\tilde{\mu}}^{\tilde{d}} G_{F,i}$ anstelle von G, $l=e+e$, $m=1$- und mit (i),(ii) die verlangte Abschätzung für H_F im allgemeinen Fall $|d|>0$.

(iv) Die Abschätzungen für G_F ergeben sich mit (ii) genau wie die für $H_{F,i}$ (vgk. [4],§3)

5.Ein Fortsetzungssatz

(5.1)Einige Bemerkungen über Fourierreihen

Sei $T > 0$ eine reelle Zahl und

$Q_T := \left\{ u \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, u| , |\mathrm{Im}\, u| < \frac{T}{2} \right\} \subset \mathbb{C}$ der Würfel mit der Kantenlänge T

$\Lambda_T := \{ m_1 T + i m_2 T \in \mathbb{C} : (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \}$ sei das Periodengitter der Länge T.

Eine Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch (bzgl. Λ_T), wenn
$g(u + m) = g(u)$ für alle $u \in \mathbb{C}$, $m \in \Lambda_T$ gilt.
Ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch, so hat man als Fourierkoeffizienten bzw. Fourierreihe von g:

$$a_{m_1,m_2}(g) := \frac{1}{T^2} \iint_{Q_T} g(\eta)\, e^{-\frac{2\pi i}{T}\{\eta_1 m_1 - \eta_2 m_2\}}\, d\eta_1 d\eta_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2 \in \mathbb{C}, \quad (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}$$

oder anders geschrieben:

$$a_m(g) := a_{m_1,m_2}(g) = \frac{1}{T^2} \iint_{Q_T} g(\eta)\, e^{-\frac{\pi i}{T}\{\bar{m}\eta + m\bar{\eta}\}}\, d\eta_1 d\eta_2, \quad m = m_1 + i m_2$$

bzw. $\mathcal{F}(g) = \sum_{m = m_1 + i m_2 \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} a_m(g)\, e^{\frac{\pi i}{T}\{\bar{m}u + m\bar{u}\}} = \sum_{(m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^2} a_{m_1,m_2}(g)\, e^{\frac{2\pi i}{T}\{m_1 u_1 + m_2 u_2\}}$

$u = u_1 + i u_2 \in \mathbb{C}.$

Wir notieren einige Eigenschaften dieser Größen : (vgl. [10])

a) Ist $g \in C^k(\mathbb{C})$ periodisch bzgl Λ_T, so gilt für alle $m \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ und alle $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le k$:

$$a_m \left(D_u^{\alpha_1} D_{\bar{u}}^{\alpha_2} g\right) = \left(\frac{\pi i}{T}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} \bar{m}^{\alpha_1} m^{\alpha_2} a_m(g)$$

b) Mit der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} |a_m g|^2 = \left(\iint_{Q_T} |g(\eta)|^2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

folgt für periodisches $g \in C^2(\mathbb{C})$:

$$\sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} |a_m g| = \sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} \frac{T^2}{m^2 \pi^2} \left| \left(\frac{\pi i}{T}\right)^2 m^2 a_m(g) \right| \le$$

$$\frac{T^2}{\pi^2} \left(\sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} \frac{1}{|m|^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} \left| \left(\frac{\pi i}{T}\right)^2 m^2 a_m(g) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\frac{T^2}{\pi^2} \left(\iint_{Q_T} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\eta) \right|^2 d\eta_1 d\eta_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} \frac{1}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\frac{T^3}{\pi^2} \| g \|_{2, \bar{Q}_T} \left(\sum_{k_1 \le |m_1|, |m_2| \le k_2} \frac{1}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

c) Ist $g \in C^{k-2}(\mathbb{C})$ periodisch bzgl. Λ_T, so konvergiert die Fourierreihe von g auf $\mathbb{C}$ gegen g und für alle $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le k$ ist:

$$D_u^{\alpha_1} D_{\bar{u}}^{\alpha_2} g(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi i}{T}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} \bar{m}^{\alpha_1} m^{\alpha_2} a_m(g) \, e^{\frac{\pi i}{T}\{\bar{m}u + m\bar{u}\}}$$

(5.2) Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ sei $C_T^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1) \subset C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$ der Unterraum aller C^k-Funktionen $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:
Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{Trt}_x \subset Q_T$.
Ist $f \in C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$, so bezeichnen wir mit $\tilde{f} \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$ die Funktion, die wir durch periodische Fortsetzung von $f_x|Q_T$ auf $\mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$, aus f erhalten.
Auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1$ gilt dann nach 5.1.:

$$f(x,u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} a_m(\tilde{f}_x)\, e^{\frac{2\pi i}{T}(\bar{m}u - m\bar{u})}.$$

Es soll nun z. B. eine Funktionenfolge $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}}$,
$\varphi_l \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1)^2)$, $l \in \mathbb{N}$ konstruiert werden, so daß für $f \in C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$ durch

$$F_f(x,\lambda,u,\mu,w) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} a_m(\tilde{f}_x)\, e^{\frac{2\pi i}{T}(\bar{m}u - mw)} \varphi_{|m_1|+|m_2|}(x,\lambda,u,\mu,w)$$

eine stetige Funktion definiert wird, deren Ableitungen geeigneter Ordnung existieren, und so daß $\varphi_e(x,\lambda,u,\mu,w) = 1$ in einer Umgebung U_e von $\{(x,\lambda,u,\mu,w) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1)^2 : w = \bar{u}\}$, so mit also $F_f(x,\lambda,u,\mu,\bar{u}) = \tilde{f}(x,u)$, $(x,\lambda,u,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^n$, gilt.
Die Partialsummen von F_f sind dann $\in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1)^2)$ und bisher bewiesenen Aussagen lassen sich auf sie anwenden.
Um die Funktionen F_f zu charakterisieren ist folgende Definition zweckmäßig:

(5.3) Definition 4:
Für $k \in \mathbb{N}$, K kompakt $\subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1)^2$, $F \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1)^2)$ sei

$$\|F\|^{(p)}_{k,K} := \max_{(x,\lambda,u,\mu,w)\in K} \left| D_x^{\alpha} D_\lambda^{\beta} D_{\bar\lambda}^{\tilde\beta} D_\mu^{\gamma} D_{\bar u}^{\tilde\gamma} D_{\bar\mu}^{\delta} D_{\bar\mu}^{\tilde\delta} D_w^{\varepsilon} D_{\bar w}^{\tilde\varepsilon} F(x,\lambda,u,\mu,w)\right|$$

$$(\alpha,\beta,\tilde\beta,\gamma,\tilde\gamma,\delta,\tilde\delta,\varepsilon,\tilde\varepsilon) \in \mathbb{N}_0^n \times (\mathbb{N}_0^{2p} \times \mathbb{N}_0^2)^2 \text{ mit:}$$

$$|\alpha|+p(|\beta|+|\tilde\beta|+\delta+\tilde\delta|+\gamma+\tilde\gamma+\varepsilon+\tilde\varepsilon \le k.$$

$\overline{\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)}$ sei die Komplettierung von $\mathcal{P}^k$ bzgl. des Systems von Halbnormen $\|\ldots\|^{(p)}_{k,K}$, K kompakt $\subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$

$\overline{\mathcal{P}^\infty}$ sei entsprechend bzgl. des Systems von Halbnormen:

$\|\ldots\|^{(p)}_{k,K}$, $k \in \mathbb{N}$, K kompakt $\subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ definiert.

Gezeigt werden soll nun wie oben angedeutet und ähnlich wie Prop 4, [4], § 3):

Satz 3:

Für $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, gibt es eine lineare stetige Abbildung

$$\mathcal{E}_T : C_T^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1) \longrightarrow \overline{\mathcal{P}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)} \text{ mit den Eigenschaften}$$

(i): $\mathcal{E}_T(C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)) \subset \overline{\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)}$ und

$\mathcal{E}_{T,k} := \mathcal{E}_T \mid C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1) : C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1) \longrightarrow \overline{\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)}$

ist stetig, $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) $\mathcal{E}_T(f)(x,\lambda,u,\mu,\bar u) = f(x,u)$ für alle

(x,λ,u,μ) mit $u \in \Omega_T$ und für alle $f \in C_T^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$.

(5.4) Wir konstruieren zunächst eine Folge $\{\varphi_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ von Funktion $\varphi_e \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ wie oben angedeutet.

Sei $A := \{ (x,\lambda,u,\mu,w) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 : w = \bar{u} \}$ und

$\tilde{A} := \{ (u,w) \in \mathbb{C}^2 : w = \bar{u} \}$.

Dann ergibt sich für $y = (x,\lambda,u,\mu,w)$:

$\operatorname{dist}(y,A) = \operatorname{dist}((u,w),\tilde{A}) = \frac{\sqrt{2}}{2}|\bar{u} - w|$.

Es läßt sich wie folgt eine Überdeckung $\{W_i\}_{i \in I}$ von $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A$ durch achsenparallele Würfel $W_i \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ angeben, die bei dem Beweis des Whitneyschen Fortsetzungssatzes eine Rolle spielt:

(zum Beweis vergleiche [1], pp 122)

Lemma 6:

Es gibt eine abzählbare Familie $\{W_i\}_{i \in I}$ von (bzgl der reellen Koordinaten) achsenparallelen $W_i \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A$, ein $n_o \in \mathbb{N}$, sowie reelle Konstanten $c_i = c_i(n,p)$, $i = 1,2$, so daß mit

$\lambda = \lambda(n,p) := \frac{1}{4\sqrt{n+4p+1}}$ und $W_i' := (1-\lambda) \cdot W_i$ folgt:

(i) $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A = \bigcup_{i \in I} W_i$ ist lokalendlich: Jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A$ besitzt eine Umgebung $U(y)$ mit $U(y) \cap W_i = \emptyset$ für höchstens n_o Indizes $i \in I$. Es gilt $\overset{\circ}{W}_i \cap \overset{\circ}{W}_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $i,j \in I$

(ii) Ist e_i die Kantenlänge von W_i, so ist

$$\frac{1}{2} e_i \leq \operatorname{dist}(W_i,A) \leq c_1 e_i \quad , \; i \in I.$$

(iii) Für alle $y \in W_i'$ gilt

$$\frac{1}{4} e_i \leq \operatorname{dist}(y,A) \leq c_2 e_i \quad , \; i \in I.$$

Bzgl. dieser Überdeckung $\{W_i\}_{i \in I}$ wird unten eine geeignete Teilung der Eins konstruiert; dazu benötigen wir das folgende Lemma, dessen Beweis sich genau wie der zu Lemma 7, [4], § 4 ergibt, indem man die dort auftretenden Konstanten geeignet abändert.

Lemma 7:

$E \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$ sei der abgeschlossene, achsenparallele Einheitswürfel mit O als Mittelpunkt, $E' := (\lambda+\tau)E$ mit λ aus Lemma 6, $E = E_1 \times E_2$, $E' = E_1' \times E_2'$, $E_1, E_1' \subset \mathbb{C}^p$, $E_2, E_2' \subset \mathbb{C}^1$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^p)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{C}^1)$ seien nicht-negativ, reellwertig mit $\mathrm{Tr}\varphi \subset E_1$, $\mathrm{Tr}\psi \subset E_2$,

$$\int_{\mathbb{C}^p} \varphi(\lambda)\, d\lambda'\, d\lambda'' = 1 = \int_{\mathbb{C}^1} \psi(u)\, du'du'' \qquad (u=u'+iu'', \lambda = \lambda'+i\lambda'')$$
$$u', u'' \in \mathbb{R},\ \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}^p$$

Dann gibt es Konstanten $\alpha_i = \alpha_i(p) \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0 \ \forall$ $i=1,2$, sowie zu jedem normierten Polynom

$$q(\lambda,u) = u^p + a_1(\lambda)\, u^{p-1} + \ldots + a_p(\lambda),$$ mit C^1-Funktionen a_i in einer Umgebung von E_1', eine Teilmenge $B = B(q) \subset E'$, so daß folgendes gilt:

Wählt man

$$N \geq \max\left(1, \sum_{i=1}^{p} \max_{(\lambda,u) \in E'} \left(\left|\frac{\partial q}{\partial \lambda_i'}(\lambda,u)\right| + \left|\frac{\partial q}{\lambda_i''}(\lambda,u)\right| \right)\right)$$

und definiert man

$$\varrho(\lambda,u) := \left(\frac{N}{\alpha_p}\right)^{2p} \varphi\left(\frac{N}{\alpha_p}\lambda\right) \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right)^2 \psi\left(\frac{u}{\alpha_1\alpha_2}\right),$$

so hat die Faltung η von φ mit der charakteristischen Funktion χ_B von B -

$$\eta(\lambda,u) = \int_{\mathbb{C}^{p+1}} \chi_B(\tilde{\lambda},\tilde{u})\, \varphi((\lambda,u) - (\tilde{\lambda},\tilde{u}))\, d\tilde{\lambda}'d\tilde{\lambda}''d\tilde{u}'d\tilde{u}''$$

folgende Eigenschaften:

(i) $\eta \in C_o^\infty(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$, $\eta(\lambda,u) = 1$ für alle $(\lambda,u) \in E$ und $\eta(\lambda,u) = 0$, falls $(\lambda,u) \notin E'$.

(ii) Es gibt eine offene Umgebung U von $Y = Y_q := \{(\lambda,u) \in E_1' \times \mathbb{C} : q(\lambda,u) = 0\}$, so daß für jedes $\lambda \in E_1'$ die Funktion η_λ konstant ist auf den Zusammenhangskomponenten von $\pi_2(U \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}))$,
$\pi_2 : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$, $(\lambda,u) \xmapsto{\pi_2} u$, die Projektion.

Mit Hilfe von Lemma 7 zeigen wir: (Bezeichnungen wie notiert)

Lemma 8:
Zu $i \in I$ gibt es ein $\psi_i \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ mit:

(i) Es ist $\mathrm{Tr}\, \psi_i \subset W_i'$, ψ_i ist reellwertig und nicht negativ; für $y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A$ gilt:

$$\sum_{i \in I} \psi_i(y) = 1 .$$

(ii) Zu jedem Multiindex $(a,b,\tilde{b},c,\tilde{c},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) \in \mathbb{N}_o^n \times (\mathbb{N}_o^{2p} \times \mathbb{N}_o^2)^2$ und zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ gibt es eine reelle Konstante $C(K,a,b,\tilde{b},c,\tilde{c},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) > 0$ mit:

$$\left| D_x^a D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b} D_u^c D_{\bar u}^{\tilde c} D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d} D_w^e D_{\bar w}^{\tilde e} \psi_i(y) \right| \le \frac{C(K,a,b,\tilde b,c,\tilde c,d,\tilde d,e,\tilde e)}{dist(y,A)^{|a|+p(|b+\tilde b+d+\tilde d|)+c+\tilde c+e+\tilde e}}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A$ und $i \in I$, so daß $W_i \cap K \neq \emptyset$ gilt.

Beweis:

$W_i \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ zerlegen wir in $W_i = W_i^{(1)} \times W_i^{(2)} \times W_i^{(3)}$ mit Würfeln $W_{(i)}^{(1)} \subset \mathbb{R}^n$, $W_i^{(2)}$, $W_i^{(3)} \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$.

$(x^{(i)}, \lambda^{(i)}, u^{(i)}, \mu^{(i)}, w^{(i)})$ sei der Mittelpunkt von W_i, $i \in I$.

Wir betrachten die normierten Polynome

$$q_i(\lambda,u) := \frac{1}{e_i^p} P(e_i\lambda + \lambda^{(i)}, e_i u + u^{(i)})$$

$$\tilde q_i(\mu,w) := \frac{1}{e_i^p} P(e_i\mu + \mu^{(i)}, e_i w + w^{(i)})$$

über den Einheitswürfel $E \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$ bzw. E' wie in Lemma 7.

Sei $M_i := \max\left(1, \sum_{j=1}^{p} \max_{(\lambda,u)\in W_i^{(2)}} \left(\left|\frac{\partial P}{\partial \lambda_j'}(\lambda,u)\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial \lambda_j''}(\mu,u)\right|\right)\right)$

$$\tilde M_i := \max\left(1, \sum_{j=1}^{p} \max_{(\mu,w)\in W_i^{(3)}} \left(\left|\frac{\partial P}{\partial \mu_j'}(\mu,w)\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial \mu_j''}(\mu,w)\right|\right)\right);$$

dann ist nach Definition von $q_i, \tilde q_i$:

$$\sum_{j=1}^{p} \max_{(\lambda,u)\in E'} \left(\left|\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j'}(\lambda,u)\right| + \left|\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j''}(\lambda,u)\right|\right) \le \frac{M_i}{e_i^{p-1}} =: N_i$$

$$\sum_{j=1}^{p} \max_{(\mu,w)\in E'} \left(\left| \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \mu_j'}(\mu,w) \right| + \left| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \mu_j''}(\mu,w) \right| \right) \leq \frac{\tilde{M}_i}{e_i^{p-1}} =: \tilde{N}_i .$$

Lemma 8 werde angewandt auf $q_i, \tilde{q}_i, N_i, \tilde{N}_i$;

$\eta_i, \tilde{\eta}_i \in C_o^\infty(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$ seien die dort konstruierten Funktionen.

Wir wählen $\zeta \in C^\infty \mathbb{R}^n$, mit $\mathrm{Tr}\,\zeta \subset \hat{E}'$ und $\zeta(x) = 1$, falls $x \in \hat{E}$ ist.

($\hat{E} \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitswürfel der oben beschriebenen Form)

Weiter definieren wir

$$\tilde{\psi}_i(x,\lambda,u,\mu,w) := \zeta\left(\frac{x-x^i}{e_i}\right) \eta_i\left(\frac{\lambda-\lambda^i}{e_i}, \frac{u-u^i}{e_i}\right) \tilde{\eta}_i\left(\frac{\mu-\mu^i}{e_i}, \frac{w-w^i}{e_i}\right)$$

und $\psi_i(y) := \dfrac{\tilde{\psi}_i(y)}{\sum_{i\in I} \tilde{\psi}_i(y)}$, $y = (x,\lambda,u,\mu,w) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$.

Nach Konstruktion ist $\tilde{\psi}_i(y) = 1$ auf W_i und damit nach den Eigenschaften der Überdeckung $\{W_i\}$:

$$\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2) \quad \text{und es folgt sofort (i).}$$

Es reicht $\tilde{\psi}_i$ abzuschatzen, um (ii) zu zeigen.

Wegen $D_x^a D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b} D_u^c D_{\bar u}^{\tilde c} D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d} D_w^e D_{\bar w}^{\tilde e} \tilde{\psi}_i =$

$$\frac{1}{e_i^{|a|+|b|+|\tilde b|+|d|+|\tilde d|+|e|+|\tilde e|+|c|+|\tilde c|}} D_x^a \zeta\, D_\lambda^b D_{\bar\lambda}^{\tilde b} D_u^c D_{\bar u}^{\tilde c} \eta_i\, D_\mu^d D_{\bar\mu}^{\tilde d} D_w^e D_{\bar w}^{\tilde e} \tilde{\eta}_i$$

reicht es die Ableitungen von η_i bzw. $\tilde{\eta}_i$ abzuschätzen.

Es war in Lemma 7:

$$\eta_i(\lambda,u) = \left(\frac{M_i}{\alpha_*^p e_i^{p-1}}\right)^{2p} \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right)^2 \int_{\mathbb{C}^{p+1}} \chi_{B_i}(\tilde\lambda,\tilde u) \cdot$$

$$\varphi\left(\frac{M_i}{\alpha_*^p e_i^{p-1}}(\lambda-\tilde\lambda)\right)\psi\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}(u-\tilde u)\right) d\tilde\lambda'\, d\tilde\lambda''\, d\tilde u'\, d\tilde u''$$

und daher folgt durch Differenzieren unter dem Integralzeichen:

$$\left|D_\lambda^b D_{\tilde\lambda}^{\tilde b} D_u^c D_{\tilde u}^{\tilde c}\, \eta_i(\lambda,u)\right| \le C(b,\tilde b,c,\tilde c)\cdot \frac{M_i^{|b+\tilde b|}}{e_i^{(p-1)|b+\tilde b|}}$$

und analog

$$\left|D_\mu^d D_{\tilde\mu}^{\tilde d} D_w^e D_{\tilde w}^{\tilde e}\, \tilde\eta_i(\mu,w)\right| \le \tilde C(d,\tilde d,e,\tilde e)\, \frac{\tilde M_i^{|d+\tilde d|}}{e_i^{(p-1)|d+\tilde d|}}$$

auf $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$.

Benutzt man Lemma 6, (iii), so folgt sofort Teil (ii).

$\psi_i \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ folgt leicht aus Lemma 7, (ii).

Wir können nun die Folge $\{\varphi_e\}_{e\in\mathbb{N}}$, $\varphi_e \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ angeben:

Für $l \in \mathbb{N}$ sei

$U_l(A) := \{ y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 : \operatorname{dist}(y,A) < \frac{1}{l} \}$ und

$I_l := \{ i \in I: \operatorname{Tr}\psi_i \subset U_l(A) \}$; weiter definieren wir:

$$\varphi_e(x,\lambda,u,\mu,w) := \begin{cases} \sum_{i\in I_e} \psi_i(x,\lambda,u,\mu,w), & (x,\lambda u,\mu,w) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 - A \\ 1, & (x,\lambda,u,\mu,w) \in A \end{cases}$$

Sei $q > 0$ eine reelle Konstante und

$$y_o \in \{ y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 : \operatorname{dist}(y,A) < \frac{1}{q \cdot 1} \}$$

Ist dann $\psi_1(y_o) \neq 0$, so folgt $y_o \in W_1'$, und für $y \in W_1'$:
$\operatorname{dist}(y,A) \leq \operatorname{dist}(y_o,A) + \text{Durchmesser}(W_1') <$

$$\frac{1}{q \cdot 1} + \sqrt{n+4(p+1)}\ (1+\lambda) e_1 \leq \frac{1}{q \cdot 1} + 4 \cdot \sqrt{n+4(p+1)}\ (1+\lambda)\ \frac{1}{q \cdot 1} < \frac{1}{1} \text{ , falls}$$

$q > 1 + 4 \cdot \sqrt{n+4(p+1)} \cdot (\lambda+1)$ gewählt wird.

Zusammen mit Lemma 6, (i), Lemma 8, (ii) und $\psi_1 \in \mathcal{D}^\infty \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ erhalten wir sofort:

Lemma 9:
Es ist für $e \in \mathbb{N}$: $\varphi_e \in \mathcal{D}^\infty \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$
Auf $V_e := \{ y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 : \operatorname{dist}(A,y) < \frac{1}{q e} \}$ ist $\varphi_e \equiv 1$ und es gilt $\operatorname{Tr} \varphi_e \subset U_e = \{ y \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2 : \operatorname{dist}(y,A) < \frac{1}{e} \}$

(5.5) Beweis zu Satz 3:

Zu $f \in C_T^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1), k \in \mathbb{N}_o, k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 < k_2$

betrachten wir die Partialsummen

$$F_f^{(k_1,k_2)}(x,\lambda,u,\mu,w) := \sum_{k_1 \leq |m_1| + |m_2| \leq k_2} a_m(\tilde{f}_x)\, e^{\frac{\pi i}{T}\{\bar{m}u + m w\}}\, \varphi_{|m_1|+|m_2|}(x,\lambda,u,\mu,w)$$

die auf kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ abgeschätzt werden sollen (vgl. 5.2).

Offenbar gilt nach Lemma 9: $F_f^{(k_1,k_2)} \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$.

$(a,b,\tilde{b},c,\tilde{c},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) \in \mathbb{N}_o^n \times (\mathbb{N}_o^{2p} \times \mathbb{N}^2)^2$ sei ein Multiindex mit

$|a|+p(|b+\tilde{b}+d+\tilde{d}|)+c+\tilde{c}+e+\tilde{e} \leq k$ und $K \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$ sei kompakt, $y=(x,\lambda,u,\mu,w) \in K$.

Nach der Leibnitzschen Regel reicht es Ausdrücke folgender Art abzuschätzen: $F^{(k_1,k_2)}_{a',a'',b,\tilde{b},c',c'',\tilde{c},d,\tilde{d},e',e'',\tilde{e}}(y) =$

$$\sum_{k_1 \leq |m_1|,|m_2| \leq k_2} a_m ((D_x^{a'} f)_x)\, D_u^{c'} D_w^{e'} (\exp(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+mw)))\cdot$$

$$D_x^{a''} D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_u^{c''} D_{\bar{u}}^{\tilde{c}} D_\mu^d D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} D_w^{e''} D_{\bar{w}}^{\tilde{e}}\, \varphi_{|m_1|+|m_2|}(y)$$

mit $a=a'+a''$, $c'+c''=c$, $e'+e''=e$.

(i) Es ist $|D_x^{a''} D_\lambda^b D_{\bar{\lambda}}^{\tilde{b}} D_u^{c''} D_{\bar{u}}^{\tilde{c}} D_\mu^d D_{\bar{\mu}}^{\tilde{d}} D_w^{e''} D_{\bar{w}}^{\tilde{e}} \varphi_{|m_1|+|m_2|}(y)| \leq$

$$n_o C(K,a'',b,\tilde{b},c'',\tilde{c},d,\tilde{d},e'',\tilde{e}) \cdot (q(|m_1|+|m_2|))^{|a''|+p|b+\tilde{b}+d+\tilde{d}|+c''+\tilde{c}+e''+\tilde{e}}$$

nach Lemma 8, (ii) und nach Lemma 9. (Auf $V_{|m_1|+|m_2|}$ ist $\varphi_{|m_1|+|m_2|}=1$)

(ii) Weiter haben wir: $D_u^{c'} D_w^{e'} (\exp(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+mw))) =$

$$(\tfrac{\pi i}{T})^{c'+e'} \bar{m}^{c'} m^{e'} \exp(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+mw)) = (\tfrac{\pi i}{T})^{c'+e'} \bar{m}^{c'} m^{e'} \exp(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+m\bar{u}))\cdot$$

$$\exp(\tfrac{\pi i}{T}(m(w-\bar{u})))$$

Da für $y \in \mathrm{Tr}\, \varphi_{|m_1|+|m_2|}$ gilt: $\mathrm{dist}(A,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}|\bar{u}-w| < \frac{1}{|m_1|+|m_2|}$,

erhalten wir: $|D_u^{c'} D_w^{e'} (\exp(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+mw)))| \leq (\tfrac{\pi}{T})^{c'+e'} \exp(\tfrac{2}{\sqrt{2}}\tfrac{\pi}{T})|m|^{c'+e'}$

(iii) Nach 5.1.a. gilt noch folgende Abschätzung:

$$|a_m(D_x^{a'}\tilde{f})_x| \le (\tfrac{T}{\pi})^{k-|a'|}\,|m|^{-k+|a'|}\,|a_m((D_u^{k-|a'|}D_x^{|a'|}\tilde{f})_x)$$

Wegen $|a| + p|b + \tilde{b} + d + \tilde{d}| + c + \tilde{c} + e + \tilde{e} \le k$ und wegen 5.1.(b) gilt mit (i), (ii), (iii):

$$\left|F^{(k_1,k_2)}_{a',a'',b,\tilde{b},c',c'',\tilde{c},d,\tilde{d},e',e'',\tilde{e}}(y)\right| \le$$

$$\sum_{k_1\le|m_1|\,,\,|m_2|\le k_2} \hat{C}(K)\,(|m_1|+|m_2|)^{|a''|+p(|b+\tilde{b}+d+\tilde{d}|)+c''+\tilde{c}+e''+\tilde{e}}\;|m|^{c'+e'}\;|m|^{-k+|a'|}\;a_m((D_u^{k-|a'|}D_x^{a'}\tilde{f})_x$$

$$C(K,a,b,\tilde{b},c,\tilde{c},d,\tilde{d},e,\tilde{e})\Big(\sum_{k_1\le|m_1|\,,\,|m_2|\le k_2}\frac{1}{|m|^4}\Big)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[k_1,k_2\to\infty]{} 0$$

gleichmäßig auf K.

Damit ist $(F_f^{(k_1,k_2)})_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0^2}$ eine Cauchyfolge in

$\mathcal{S}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ bzgl. der Normen $\|\ldots\|^{(p)}_{k,K}$, $\mathcal{S}_T(f)$ mit

$$\mathcal{S}_T(f)(y) := \sum_{m\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} a_m(\tilde{f}_x)\exp\left(\tfrac{\pi i}{T}(\bar{m}u+mw)\right)\varphi_{|m_1|+|m_2|}(x,\lambda,u,\mu,w)$$

$y=(x,\lambda,u,\mu,w)\in\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2$, erfüllt also (i) in Satz 3.

Teil (ii) in Satz 3 ergibt sich nach 5.1.c., 5.2. und wegen

$\varphi_{|m_1|+|m_2|} \equiv 1$ auf $V_{|m_1'|+|m_2'|}$ nach Lemma 9.

6. Die Division im allgemeinen Fall.

(6.1) Für $l \in \mathbb{N}$ sei $W_l := \{\lambda \in \mathbb{C}^p : -l \leq \operatorname{Re}\lambda_j, \operatorname{Im}\lambda_j < l, j=1,\ldots,p\}$,

$$W_o := \emptyset \quad , \quad B_l := W_{l+2} - \overline{W}_{l-1} \quad , \quad B_o := W_2 \, .$$

$n_1 \in \mathbb{N}$ werde so gewählt, daß für $(\lambda,u) \in \overline{B}_1 \times \mathbb{C}$ mit $P(\lambda,u) = 0$ folgt : $u \in \frac{1}{2}\hat{W}_{n_1}$, $\hat{W}_{n_1} = \{u \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} u|, |\operatorname{Im} u| < n_1\}$

Wir fixieren ein $g_1 \in C_o^\infty(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Tr} g_1 \subset 2\cdot\hat{W}_{n_1}$ und mit $g_1 \equiv 1$ auf $\hat{W}_{n_1}$ und definieren für $f \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$: $f_1 := g_1 \cdot f$.

Auf f_1 können wir Satz 3 anwenden:

Es ist $\mathcal{S}_{2n_1\cdot k}(f_1) =: F_1 \in \overline{\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)}$.

(6.2) Für eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, sei $[r] \in \mathbb{N}_o$ die natürliche Zahl mit $[r] \leq r < [r] + 1$.

Ist $\alpha = (a,b,\tilde{b},c,\tilde{c},d,\tilde{d},e,\tilde{e}) \in \mathbb{N}_o^n \times ((\mathbb{N}_o^p)^2 \times \mathbb{N}_o^2)^2$ ein Multiindex mit:

$$|\alpha| \leq \left[\frac{k-p}{p}\right] \text{ bzw. } \leq \left[\frac{k+1}{p}\right] - 1 \text{ bzw. } \leq \left[\frac{k-2p}{p}\right] \text{ bzw. } \leq \left[\frac{k+2}{p}\right] - 2$$

($k \geq 2p$ sei vorausgesetzt), so gelten insbesondere die Ungleichungen bzgl. G_F bzw. $r_{F,i}$ bzw. H_F bzw. $r_{F,i,j}$ in Satz 2 und 4.4 (ii) und ferner gilt:

$$|\alpha| + p|b + \tilde{b} + d + \tilde{d}| + c + \tilde{c} + e + \tilde{e} \leq k \, .$$

Wegen Satz 2 und Satz 3 und wegen der Vollständigkeit der Räume

$C^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$, $C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$ etc, ergibt sich:

$$F_e = \tilde{G}_{F_e} \cdot P(\lambda,u) + \sum_{i=1}^{p} r_{F_e,i}\, u^{p-i}$$

$$r_{F_e,i} = G_{F_e,i} \cdot P(\mu,w) + \sum_{j=1}^{p} r_{F_e,i,j}\, w^{p-j}$$

$$F_e = \tilde{G}_{F_e} \cdot P(\lambda,u) + H_{F_e} \cdot P(\mu,w) + \sum_{i,j=1}^{p} r_{F_e,i,j}\, u^{p-i}\, w^{p-j}$$

mit Funktionen

$$\tilde{G}_{F_e} \in C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)\,,\quad r_{F_e,i} \in C^{\left[\frac{k+1}{p}\right]-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)$$

$$H_{F_e} \in C^{\left[\frac{k-2p}{p}\right]}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)\,,\quad r_{F_e,i,j} \in C^{\left[\frac{k+2}{p}\right]-2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p)$$

(6.3) Für $(x,u,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p$, $\lambda \in B_e$ ist nun nach Wahl von n_e folgende Definition sinnvoll:

$$G_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu) := \begin{cases} \tilde{G}_{F_e}(x,\lambda,u,\mu,\bar{u}), \text{ falls } (\alpha,\lambda) \in W_{n_e} \times B_e \\ \dfrac{f(x,u) - \sum_{i=1}^{p} r_{F_e,i}(x,\lambda,\mu,\bar{u})\, u^{p-i}}{P(\lambda,u)} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter setzen wir: $r_{f,i}^{(e)}(x,\lambda,u,\mu) := r_{F,i}(x,\lambda,\mu,\bar{u})$,

$$G_{f,i}^{(e)}(x,\lambda,u,\mu) := G_{F_e,i}(x,\lambda,\mu,\bar{u})\,,\quad r_{f,i,j}^{(e)}(x,\lambda,\mu) := r_{F_e,i,j}(x,\lambda,\mu)$$

$$H_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu) := \sum_{i=1}^{p} G_{f,i}^{(e)}(x,\lambda,u,\mu)\, u^{p-i} \quad , \; i,j = 1,\dots,p \; ,$$

$$(x,\lambda,u,\mu) \in \mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p \; .$$

Es folgt nach dieser Konstruktion und mit (6.2), (6.1):

Lemma 10:

Auf $\mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p$ gilt für $f \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^1)$, $k \geq 2p$:

$$f(x,u) = G_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu)P(\lambda,u) + H_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu)P(\mu,\bar{u}) + \sum_{i,j=1}^{p} r_{f,i,j}^{(e)}(x,\lambda,\mu)u^{p-i}\bar{u}^{p-j}$$

mit $G_f^{(e)} \in C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(\mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p)$, $H_f^{(e)} \in C^{\left[\frac{k-2p}{p}\right]}(\mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p)$

und $r_{f,i,j}^{(e)} \in C^{\left[\frac{k+2}{p}\right]-2}(\mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^p)$.

$f \longmapsto (G_f^{(e)}, H_f^{(e)}, r_{f,i,j}^{(e)} : i,j = 1,\dots,p)$ ist linear und stetig.

(6.4) Sei W_e, B_e für $e \in N_o$ wie in 6.1. bestimmt:
$\alpha_e \in C_o^\infty(\mathbb{C}^p)$, $e \in N_o$, werde so gewählt, daß $\mathrm{Tr}\,\alpha_e \subset B_e$ und $\alpha_e(\lambda) = 1$ auf $\Omega_e := W_{e+1} - \overline{W}_e$ gilt; dann wird durch

$$b_e(\lambda) := \frac{\alpha_e(\lambda)}{\sum_{e \in N_o} \alpha_e(\lambda)} \; , \; e \in N_o \text{ eine } C^\infty\text{-Teilung der Eins}$$

bzgl. $\{B_e\}_{e \in N_o}$ definiert.

Auf $\mathbb{R}^n \times B_e \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p$ gilt nach Lemma 10:

$$b_e(\lambda)f(x,u) = G_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu)b_e(\lambda)P(\lambda,u) + H_f^{(e)}(x,\lambda,u,\mu)b_e(\lambda)P(\mu,\bar{u})$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{p} r_{f,i,j}^{(e)}(x,\lambda,\mu)b_e(\lambda)u^{p-i}\bar{u}^{p-j} .$$

Wegen $\mathrm{Tr}\, b_e \subset B_e$ und wegen der lokalen Endlichkeit der Überdeckung $\{B_e\}$ können wir definieren:

$$G_f(x,\ ,u) := \overline{\sum_{e \in N_o}} G_f^{(e)}(x,\lambda,u,\bar{\lambda})b_e(\lambda), H_f(x,\lambda,u) := \overline{\sum_{e \in N_o}} H_f^{e}(x,\lambda,u,\bar{\lambda})b_e(\lambda)$$

$$r_{f,i,j}(x,\lambda) := \overline{\sum_{e \in N_o}} r_{f,i,j}^{e}(x,\lambda,\bar{\lambda})\, b_e(\lambda)\ ,\ (x,u,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$$

und es gilt:

$$f(x,u) = G_f(x,\lambda,u)P(\lambda,u) + H_f(x,\lambda,u)\overline{P(\lambda,u)} + \sum_{i,j=1}^{p} r_{f,ij}(x,\lambda)u^{p-i}\bar{u}^{p-j}$$

$(x,\lambda,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$; G_f, H_f, $r_{f,i,j}$ hängen linear und stetig von f ab.

(6.5) Wir wollen noch bemerken, daß man in 6.4. $\mathbb{R}^n$ durch eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ersetzen kann:

(i) Man liest aus obigen Konstruktionen, aus dem Divisionsverfahren in $\mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)^2)$ und aus der Definition von $\mathcal{E}_T$ sofort ab:
Ist für ein $x_o \in \mathbb{R}^n$ $f(x_o,u) \equiv 0$, so folgt:

$$G_f(x_o,\lambda,u) \equiv H_f(x_o,\lambda,u) \equiv r_{f,i,j}(x_o,\ ) \equiv 0,\ i,j = 1,\ldots,p,$$

$(\lambda,u) \in \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^p$.

(ii) Sei nun $f \in C^{k+2}(U \times \mathbb{C}^1)$, U offen $\subset \mathbb{R}^n$.

$\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge relativkompakter offener Mengen $K_\nu \subset U$ ($\bar{K}_\nu \subset U$) mit $\bar{K}_\nu \subset K_{\nu+1}$ und mit $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu = U$.

Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei $g_\nu \in C_o^\infty(U)$ gewählt mit $g_\nu(x) = 1$ auf K_ν und $\mathrm{Tr}\, g_\nu \subset K_{\nu+1}$.

Auf $g_\nu f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C})$ können wir die Division aus 6.4. anwenden und es gilt $\lim g_\nu f = f$ in $C^{k+2}(U \times \mathbb{C})$.
Ein Stetigkeitsargument liefert dann (vgl. die Bemerkung in (i) und beachte die Stetigkeit der in 6.4. konstruierten $G_f, H_f, r_{f,i,j}$ in Abhängigkeit von f):

Satz I':

Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und

$$P(\lambda,u) := u^p + \lambda_1 u^{p-1} + \ldots + \lambda_p \in C[\lambda_1,\ldots,\lambda_p,u] .$$

a) Dann gibt es eine lineare Abbildung

$$\mathcal{L}: C^{2p+2}(U \times \mathbb{C}^1) \longmapsto [C^0(U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1)]^2 \times [C^0(U \times \mathbb{C}^p)]^{p^2}$$

$$f \longmapsto \mathcal{L}(f) := (G_f, H_f, r_{f,i,j}: i,j = 1,\ldots,p)$$

mit

$$f(x,u) = G_f(x,\lambda,u)P(\lambda,u) + H_f(x,\lambda,u)\overline{P(\lambda,u)} + \sum_{i,j=1}^{p} r_{f,i,j}(x,\lambda)u^{p-i}\bar{u}^{p-j}$$

für $(x,\lambda,u) \in U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1$.

b) Ist $f \in C^{k+2}(U \times \mathbb{C}^1)$ und $k \geq 2p$, so gilt

$$G_f \in C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1),\ H_f \in C^{\left[\frac{k-2p}{2}\right]}(U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1) \text{ und}$$

$$r_{f,i,j} \in C^{\left[\frac{k+2}{p}\right]-2}(U \times \mathbb{C}^p).$$

c) Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2p$, ist die induzierte Abbildung

$$\mathcal{L}_k : C^{k+2}(U \times \mathbb{C}^1) \to C^{\left[\frac{k-p}{p}\right]}(U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1) \times C^{\left[\frac{k-2p}{p}\right]}(U \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^1) \times \left\{ C^{\left[\frac{k+2}{p}\right]-2}(U \times \mathbb{C}^p) \right\}^p$$

linear und stetig.

(6.5) Eine Substitution $\lambda_i = a_i(x)$, $i = 1,\ldots,p$, liefert daher mit Satz I' das Resultat in Satz I.

7. Eine Bemerkung über spezielle schwach holomorphe C^k-Funktionen

(7.1) A sei eine analytische Menge in der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n$, $r(A) \subset A$ sei die Menge der regulären Punkte von A. Eine holomorphe Funktion $f : r(A) \to \mathbb{C}$, die auf A lokal beschränkt ist, heißt schwach holomorph auf A; eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ heißt schwach holomorph auf A, wenn $f \mid r(A)$ schwach holomorph auf A ist.

$\tilde{\mathcal{O}}_A$ sei die Garbe der Keime von lokalen schwach holomorphen Funktionen auf A, $\mathcal{O}_A$ die der holomorphen Funktionskeime auf A.

$C^k(A)$ sei die C-Algebra der C^k-Funktionen auf A, $\mathcal{C}^k_A$ die entsprechende Garbe. $D^k(A) \subset C^k(A)$ sei die $\mathbb{C}$-Algebra der C^k-Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

Es gibt lokal eine C^k-Fortsetzung $F : U(x_o) \to \mathbb{C}$, $x_o \in A$, von f in eine Umgebung $U(x_o) \subset \mathbb{C}^n$, $F \mid U(x_o) \cap A = f \mid U(x_o) \cap A$, so daß F holomorph in einer Umgebung von $U(x_o) \cap r(A)$ ist.

$\mathcal{D}^k_A$ sei die $D^k(A)$ entsprechende Garbe.

(7.2) Nach Aussagen in [12] gibt es ein endliches $k_x \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{C}^{k_x}_{A,x} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{A,x} = \mathcal{O}_{A,x}$; offen bleibt die Bestimmung eines minimalen $k_x \in \mathbb{N}$ (bzw. $\tilde{k}_x$) mit

$$\mathcal{C}^{k_x}_{A,x} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{A,x} = \mathcal{O}_{A,x} \text{ bzw. } \mathcal{D}^{\tilde{k}_x}_{A,x} = \mathcal{O}_{A,x} .$$

etwa aus Daten über die Singularität von A in x.

In [2] ist das minimale k_x in beiden Fällen für analytische Kurven A im C^2 bestimmt worden, die parametrisiert sind durch:

$$\varphi(t) = (t^p, t^q e(t)) \ , \ e(o) = 1 \ , \ q > p \ , \ \underline{p,q \text{ relativ prim:}}$$

Im ersten Fall gilt $k_o = \frac{q(p-2)}{p}$ und im zweiten $\tilde{k}_o = p - 1$. Wir wollen zu diesem Problemkreis einen kleinen Beitrag liefern, indem wir Aussagen aus § 2 - §4 benutzen; aus dem nachfolgenden Satz folgt z. B. sehr leicht:

Ist A eine analytische Kurve durch $0 \in \mathbb{C}^{d+1}$, parametrisiert durch

$$A = \{(x,u) \in \mathbb{C}^{d+1} : x = t^p,\ u_i = \varphi_i(t)\ ,\ i = 1,\ldots,d,\ t \in U(o)\}$$

mit holomorphen Funktionen $\varphi_1,\ldots,\varphi_d$ auf $U(o) \subset \mathbb{C}^1$, $\varphi_i(o) = 0$, $i = 1,\ldots,d$,

so gilt $$\mathcal{D}_{A,o}^{(p-1)d} = o_{A,o}$$

Satz 4:

$$P_i(x_1,\ldots,x_n,u_i) = u_i^{p_i} + a_{i1}(x)u^{p_i-1} + \ldots + a_{ip_i}(x)\ ,\ i = 1,\ldots,d$$

seien normierte Polynome mit auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n$ holomorphen Koeffizienten

$$a_{ij}\ ,\ i = 1,\ldots,d$$
$$j = 1,\ldots,p_i\ !$$

die Diskriminanten D_i von P_i, $i = 1,\ldots,d$ mögen auf keiner

Zusammenhangskomponente von G identisch verschwinden.

Sei $A := \{(x,u) \in G \times \mathbb{C}^d : P_i(x,u_i) = 0,\ i = 1,\dots,d\}$ und

$p := p_1 + \dots + p_d$. Dann gilt

$$\mathcal{D}^{(p-d)\mathcal{X}}_{A,y} = \mathcal{O}_{A,y} \quad \text{für alle } y \in A.$$

Beweis:

(i) Da obige Aussage lokal ist, reicht es zu zeigen: (Man betrachte $y \in A$ und zerlege in einer Umgebung von y die Polynome P_i nach der Weierstraßschen Formel)

$P_i(x,u) = u^{p_i} + a_{i1}(x)u^{p_i-1} + \dots + a_{ip_i}(x)$ seien Weierstraßpolynome in $0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1$, $i = 1,\dots,d$, mit auf einer Umgebung $U_\varepsilon(o) \subset \mathbb{C}^n$ holomorphen Koeffizienten und mit der Eigenschaft: Ist $(x,u_i) \in U_\varepsilon(o) \times \mathbb{C}^1$, $P_i(x,u_i) = 0$ für ein i, $1 \le i \le d$, so folgt $u_i \in U_{\delta_1}(o)$. ($\varepsilon > 0$, $\delta_1 > 0$ geeignet).

Die Diskriminanten D_i von P_i seien nicht identisch null.

Ist dann $A := \{(x,u) \in U_\varepsilon(o) \times U_{\delta_1}(o) : P_i(x,u_i) = 0,\ i = 1,\dots,d\}$

$p := p_1 + \dots + p_d$ und $f \in D^{(p-d)\mathcal{X}}(A)$, so ist f holomorph auf A.

$U_\delta(o) := (U_{\delta_1}(o))^d$, $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_d)$

(ii) Sei $D = D_1 \cdot \dots \cdot D_d$ und $\Delta := \{x \in U_\varepsilon(o) : D(x) = 0\}$

Ferner sei $F \in C^k(\overline{U_\varepsilon(o)} \times \overline{U_\delta(o)})$, F holomorph in einer Umgebung U von $r(A)$, $F \mid A = f$, $k = (p-d)\mathcal{X}$

U_d sei die Projektion von U auf $U_\delta(o) \times \mathbb{C}^1$ unter $(x,u_1,\dots,u_d) \longmapsto (x,u_d)$.

$\chi_d \in C^\infty((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times \mathbb{C}^1)$ sei so gewählt, daß

$\chi_d(x,u_d) = 1$ in einer Umgebung von

$A_d \cap ((U_\varepsilon(o)-\Delta)\times\mathbb{C}^1)$, $A_d := \{(x,u_d)\in U_\varepsilon(o)\times U_{\delta_d}(o) : P_d(x,u_d)=0\}$,

gilt und ferner $\mathrm{Tr}\chi_d \subset U_{\tilde{d}}$ ist.

Für $(x,u_1,\ldots,u_{d-1})\in\left(U_\varepsilon(o)-\Delta\right)\times\left(U_\delta(o)\right)^{d-1}$, $i_d=1,\ldots,p_d$,

definieren wir wie in §2, §3 :

$$r_{F,i_d}(x,u_1,\ldots,u_{d-1}) := \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\chi_d}{\partial\bar{u}_d}(x,u_d)F(x,u_1,\ldots,u_d)b_{i_d}(x,u_d)}{P_d(x,u_d)}du_d\wedge d\bar{u}_d$$

und entsprechend $G_{F,d}$, so daß wir sagen können:

(a_d) Auf $(U_\varepsilon(o)-\Delta)\times U_\delta(o)$ gilt:

$$F(x,u)=G_{F,d}P(x,u_d)+\sum_{i_d=1}^{p_d} r_{F,i_d}(x,u_1,\ldots,u_{d-1})u_d^{p_d-i_d}$$

mit C^k-Funktionen $G_{F,d}, r_{F,i_d}, i_d=1,\ldots,p_d$;

r_{F,i_d} ist holomorph auf $U_{d-1}\cap((U_\delta(o)-\Delta)\times(U_\delta(o))^{d-1})$;

U_{d-1} ist dabei die Projektion von U auf $U_\varepsilon(o)\times\mathbb{C}^{d-1}$

unter $(x,u_1,\ldots,u_{d-1},u_d)\longmapsto(x,u_1,\ldots,u_{d-1})$.

(b_d) Es gibt eine reelle Konstante $c_d>0$, so daß für jeden Multiindex $(a_1,\ldots,a_{d-1})\in\mathbb{N}_o^{d-1}$, mit $a_1+\ldots+a_{d-1}\leq(d-1)(p-1)$ und für jedes $(x,u_1,\ldots,u_{d-1})\in U_{d-1}\cap(U_\varepsilon(o)-\Delta)\times(U_\delta(o))^{d-1})$ gilt:

$$\left|D_{u_1}^{a_1}\cdots D_{u_{d-1}}^{a_{d-1}} r_{F,i_d}(x,u_1,\ldots,u_{d-1})\right| \leq c_d \|F\|_{\mathcal{A}(p-d),\overline{U_\varepsilon(o)}\times\overline{U_\delta(o)}},$$

$i_d=1,\ldots,p_d$.

(b_d) folgt mit Hilfe von Lemma 5 völlig analog zu den Abschätzungen in § 4.

(iii) Ist $d \geq 2$, so sei $\tilde{U}_{d-1}$ die Projektion von $U_{d-1} \cap ((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times (U_{\delta_1}(o))^{d-1})$ auf $U_\varepsilon(o) \times \mathbb{C}^1$ unter $(x,u_1,\dots,u_{d-1}) \mapsto (x,u_{d-1})$ und $\chi_{d-1} \in C^\infty((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times \mathbb{C}$ werde wie in (ii) bzgl. $\tilde{U}_{d-1}$ und

$A_{d-1} = \{(x,u_d) \in U_\varepsilon(o) \times U_{\delta_1}(o) : P_{d-1}(x,u_{d-1}) = 0\}$

gewählt.

Ist U_{d-2} die Projektion von $U_{d-1} \cap ((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times (U_{\delta_1}(o))^{d-1})$ auf $U_\varepsilon(o) \times \mathbb{C}^{d-2}$ unter $(x,u_1,\dots,u_{d-1}) \mapsto (x,u_1,\dots,u_{d-2})$, so folgt mit:

$$r_{F,i_d,i_{d-1}}(x,u_1,\dots,u_{d-2}) :=$$

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \chi_{d-1}}{\partial \bar{u}_{d-1}}(x,u_{d-1}) r_{F,i_d}(x,u_1,\dots,u_{d-1}) b_{i_{d-1}}(x,u_{d-1})}{P_{d-1}(x,u_{d-1})} du_{d-1} \wedge d\bar{u}_{d-1}$$

und entsprechend $G_{F,d,i_{d-1}}$:

(a_{d-1}) Auf $U_{d-1} \cap ((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times (U_{\delta_1}(o))^{d-1})$ gilt

$$r_{F,i_d}(x,u_1,\dots,u_{d-1}) = G_{F,d,i_d}(x,u_1,\dots,u_{d-1}) P_{d-1}(x,u_{d-1}) +$$

$$\sum_{i_{d-1}=1}^{P_{d-1}} r_{F,i_d,i_{d-1}}(x,u_1,\dots,u_{d-2}) u_{d-1}^{P_{d-1}-i_{d-1}},$$

$r_{F,i_d,i_{d-1}}$ holomorph auf U_{d-2} .

(b_{d-1}) Es gibt eine reelle Konstante $c_{d-1} > 0$, so daß für jeden Multiindex $(a_1,\dots,a_{d-2}) \in \mathbb{N}_0^{d-2}$ mit $a_1 + \dots + a_{d-2} \leq (d-2)(p-1)$ und für jedes $(x,u_1,\dots,u_{d-2}) \in U_{d-2}$ gilt:

$$\left| D_{u_1}^{a_1} \dots D_{u_{d-2}}^{a_{d-2}} r_{F,i_d,i_{d-1}}(x,u_1,\dots,u_{d-2}) \right| \leq c_{d-1} ,$$

$$i_d = 1,\dots,p_d \ , \ i_{d-1} = 1,\dots,p_{d-1} .$$

(b_{d-1}) folgt aus (b_d) mit Hilfe von Lemma 5, falls man beachtet, daß die Konstanten $L_m(W)$ in Lemma 4 monoton in W wählbar sind. (d. h. für $W' \subset W$ gilt $L_m(W') \leq L_m(W)$; vgl, auch den Beweis zu Lemma 3, § 3, [4] , der zeigt, daß die Konstanten $M_k(W)$ im wesentlichen durch den Durchmesser von W bestimmt sind)

Ein Induktionsbeweis liefert nun sofort:

Es gibt auf $U_\varepsilon(o) - \Delta$ holomorphe, auf $U_\delta(o)$ lokal beschränkte Funktionen $r_{i_1,\dots,i_d}(x)$, $1 \leq i_\nu \leq p_\nu$, $\nu = 1,\dots,d$, mit

$$F(x,u) = f(x,u) = \sum_{\substack{1 \ \ i_\nu \ \ p_\nu \\ \nu = 1,\dots,d}} r_{i_1,\dots,i_d}(x) u_1^{p_1 - i_1} \dots u_d^{p_d - i_d} ,$$

$$(x,u) \in ((U_\varepsilon(o) - \Delta) \times U_\delta(o)) \cap A.$$

Mit den Riemannschen Hebbarkeitssatz ergibt sich damit aber die Behauptung unter (i) und so auch Satz 4. -

8. C^k-Relationen holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir einen Fehler aus [10] , pp 31, 32 berichtigen, da dieser der Anlaß zu dieser Arbeit war; zugleich erhalten wir eine Anwendung des reellen Divisionssatzes (vgl. [4])

(8.1) Sind $f_1,\dots,f_t$ holomorphe Funktionen in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n$, so betrachten wir die Relationsgarbe

$$\mathrm{Rel}_k(f_1,\dots,f_t) \subset [\mathcal{E}^k_G]^t \text{ , } k \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$\mathrm{Rel}_k(f_1,\dots,f_t)_x := \{ (a_1,\dots,a_t) \in (\mathcal{E}^k_{G,x})^t : a_1 f_{1x} + \dots + a_t f_{t,x} = 0 \}$$

für $x \in G$; $\mathcal{E}^k_G$ ist dabei die Garbe der Keime von lokalen C^k-Funktionen auf G.

Analog betrachten wir $\mathrm{Rel}_k(g_1,\dots,g_r)$, wenn $g_1,\dots,g_r$ reellanalytische Funktionen auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^1$ sind mit der Eigenschaft: g_i ist holomorph in den Variablen $z_1,\dots,z_n$ des $\mathbb{C}^n$.

Wir zeigen folgende Kohärenzaussage:

Satz 5:

a) Zu holomorphen Funktionen $f_1,\dots,f_t$ auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n$ gibt es eine lokalkonstante Funktion $\tilde{k} = \tilde{k}(f_1,\dots,f_t,n) : G \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: Ist $x_o \in G$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \tilde{k}_{x_o} = \tilde{k}(x_o)$ (bzw. $k = \infty$), dann gibt es eine Umgebung $U(x_o) \subset G$ und holomorphe Schnitte $s_1,\dots,s_r \in \Gamma(U(x_o), \mathrm{Rel}_k(f_1,\dots,f_t)\,|\,U(x_o))$, so daß für alle $x \in U(x_o)$ die Keime $s_{1,x},\dots,s_{r,x}$ den Halm $\mathrm{Rel}_k(f_1,\dots,f_t)_x$

über $\mathcal{O}_{G,x}^{k'}$ mit geeignetem $k' \in \mathbb{N}$, $k' \leq k$ (bzw. $k' = \infty$; erzeugen.

b) Zu reellanalytischen Funktionen $g_1,\ldots,g_t$ auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^1$, $g_1,\ldots,g_t$ holomorph in den Variablen $z_1,\ldots,z_n$ des $\mathbb{C}^n$, gibt es eine lokalkonstante Funktion $\hat{k} = \hat{k}(g_1,\ldots,g_t,,n) : G \longrightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: Ist $x_o \in G$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \hat{k}_{x_o}$ (bzw. $k = \infty$), dann gibt es; eine Umgebung $U(x_o) \subset G$ und reellanalytische Schnitte $s_1,\ldots,s_r, \in \Gamma(U(x_o), \mathrm{Rel}_k(g_1,\ldots,g_t,) U(x_o))$, die holomorph in den Variablen des $\mathbb{C}^n$ sind, so daß für alle $x \in U(x_o)$ die Keime $s_{1,x},\ldots,s_{r',x}$ den Halm $\mathrm{Rel}_k(g_1,\ldots,g_t,)_x$ über $\mathcal{O}_{G,x}^{k''}$ mit geeignetem $k'' \leq k$ (bzw. $k'' = \infty$) erzeugen.

Beweis: Für festes $n \in \mathbb{N}_o$ seien die Aussagen in Satz 5 mit (a_n) bzw. (b_n) bezeichnet.

(a_o) ist trivial.

Es werde ein Induktionsbeweis nach folgendem Schema durchgeführt:

(i) $(a_{n-1}) + (b_{n-1}) \Longrightarrow (a_n)$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $(a_n) + (b_{n-1}) \Longrightarrow (b_n)$, $n \in \mathbb{N}_o$.

(Es werden mehrfach Schlüsse benutzt, wie sie analog bei dem Beweis des klassischen Falles vorkommen)

Zu (i): Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir uns auf Umgebungen der $0 \in \mathbb{C}^n$ beschränken; ferner können wir annehmen, daß kein f_i, $i = 1,\ldots,t$ in einer Umgebung der 0 identisch verschwindet. Nach einer eventuellen linearen Koordinatentransformation können wir nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz annehmen:

(In einer Umgebung $U_\varepsilon(o) \times U_\delta(o) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^1$)

$$f_i = P_i(z_1,\ldots,z_{n-1},z_n) = z_n^{p_i} + a_{i1}(z_1,\ldots,z_{n-1})z_n^{p_i-1} + \ldots + a_{ip_i}(z_1,\ldots,z_{n-1})$$

$i = 1,\ldots,t$, mit Weierstraßpolynomen P_i in $0 \in \mathbb{C}^n$ bzgl. z_n, deren Koeffizienten a_{ij} auf $U_\varepsilon(o)$ holomorph seien. Wir setzen $z_n = u + iv$, u,v reell, und erhalten durch Ausmultiplizieren:

$$P_i(z_1,\ldots,z_{n-1},u + iv) = u^{p_i} + Q_{i1}(z_1,\ldots,z_{n-1},v)u^{p_i-1} + \ldots + Q_{ip_i}(z_1,\ldots,z_{n-1},v);$$

dabei ist Q_{ij} bis auf einen konstanten Faktor $\not\equiv 0$ ein Weierstraßpolynom in $0 \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ bzgl. v.

Es werde ein Punkt $(z_1^o,\ldots,z_{n-1}^o,u_o + iv_o) \in U_\varepsilon(o) \times U_\delta(o)$ betrachtet. Wir können nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz schreiben:

$$P_1(z_1,\ldots,z_{n-1},u + iv) = e(z_1,\ldots,z_{n-1},u + iv)\, Q(z_1,\ldots,z_{n-1},v,u - u_o)$$

mit einem Weierstraßpolynom Q in $(z_1^o,\ldots,z_n^o,v_o + iv_o)$ bzgl. der reellen Variablen $u - u_o$ von einem Grad $q \leq p_1$; e ist ein Polynom in u vom Grad $p_1 - q$ mit reellanalytischen Keimen in $(z_1^o,\ldots,z_{n-1}^o,v_o)$ als Koeffizienten.

Sei nun $(a_1,\ldots,a_t) \in \mathrm{Rel}_k(P_1,\ldots,P_t)_{(z_1^o,\ldots,z_{n-1}^o,u_o + v_o)}$.

Wir können noch annehmen, daß $p_1 \geq p_j$, $j = 1,\ldots,t$, gilt. Nach dem reellen Divisionssatz, etwa in [4] , erhalten wir für $j = 1,\ldots,t$ und hinreichend großes k:

$$a_j = G_jQ + R_j \ , \ a_j = G_jP_1 + R_j \ , \ G_j = G_je^{-1}$$

mit $C^{k'}$-Keimen G_j, G_j, R_j ($k' \leq k$ geeignet aus [4] ablesbar; vgl. auch § 6), R_j ein Polynom in u vom Grad $< q$.

Wie im klassischen Fall ist dann

$$(a_1,\ldots,a_t) = G_2\ (-P_2,P_1,0,\ldots,0) + \ldots + G_t(-P_t,0,\ldots,0,P_1) +$$

$$e^{-1}(\beta_1 e, R_2\cdot e,\ldots,R_t\cdot e)\ ,\ \beta_1 e \text{ ein}$$

Polynom in u vom Grad $\leq p_1$.

Es folgt damit:

(*) Für jedes $z_o \in U_\varepsilon(o) \times U_\delta(o)$ wird $\mathrm{Rel}_k(P_1,\ldots,P_t)_{z_o}$ erzeugt durch Polynomrelationen

$$\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_t)\ ,$$

$$\pi_i = \sum_{j=0}^{p_j} g_j^{(i)}(z_1,\ldots,z_{u-1},v)u^j \quad \text{mit } C^{k'}\text{-Keimen } g_j^i \text{ in } (z_1^o,\ldots,z_{u-1}^o,$$

Vergleicht man in $\pi_1 P_1 + \ldots + \pi_t P_t = 0$ die Potenzen von u, so ergibt sich:

$(g_j^i : i = 1,\ldots,t,\ j = 0,\ldots,p_1)$ ist eine Relation

zwischen den Schnitten

$$(Q_{o-v}^{(i)}(z_1,\ldots,z_{u-1},v),\ldots,Q_{p-v}^{(i)}(z_1,\ldots,z_{u-1},v))$$

$$i = 1,\ldots,t\ ,\ v = 0,\ldots,p_1$$

wenn $P_i = \sum_{j=0}^{p_1} Q_j^{(i)}(z_1,\ldots,z_{u-1},v)u^j$, $Q_\mu^{(i)} := 0$, falls $\mu < 0$,

geschrieben wird. Die Q_j^i sind $\equiv 0$ oder 1 oder bis auf eine Konstante Weierstraßpolynome in v vom Grad $\leq p_i$ mit in $z_1^\circ,\ldots,z_{n-1}^\circ$ holomorphen Koeffizienten in $z_1,\ldots,z_{n-1}$, wie oben bemerkt.

Die Induktionsannahme (b_{n-1}) liefert dann mit einen zu Lemma 1, [10] p 28, völlig analogen Schluß:

(**) Es gibt endlich viele Relationen $\pi^{(r)} = (\pi_1^{(r)},\ldots,\pi_t^{(r)})$ in einer Umgebung U von 0, so daß $\pi_i^{(v)}$ reellanalytisch ist, bzgl. $z_1,\ldots,z_{n-1}$ holomorph, bzgl. u ein Polynom von Grad $\leq p_1$ und so daß $\pi_z^{(r)}$ den Halm $\mathrm{Rel}_k(P_1,\ldots,P_t)_z$ über $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n,z}^{k'}$ erzeugen.

Da P_1 bzgl. v und u ein Polynom vom Grad = p_1 ist, können wir mit dem gleichen Schluß, der zu (*) führte, annehmen, daß $\pi_{(i)}^{v}$ ein Polynom in u und v vom Grad $\leq p_1$ ist. Koeffizientenvergleich und der Schluß zu (**) zusammen mit (a_{n-1}) liefert dann (a_n)

Zu (ii):

Wie zu Anfang des Beweises zu (i) kann man annehmen, daß entweder gilt

(α) Alle $g_1,\ldots,g_{t'}$ sind von der reellen Variablen u des $\mathbb{R}^1$ unabhängig und es ist in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{C}^n$: $g_i(z_1,\ldots,z_n) = z_n^{p_i} + a_{i1}(z_1,\ldots,z_{n-1})z_n^{p_i-1} + \ldots + a_{ip_i}(z_1,\ldots,z_{n-1})$ ein Weierstraßpolynom, $i = 1,\ldots,t'$.

oder

(β) Es sind $g_1,\ldots,g_\ell$ von u unabhängig und

$$P_j = g_j(z,u) = u^{p_j} + a_{j1}(z)u^{p_j-1} + \ldots + a_{jp_j}(z) \ , \ j = 1+1,\ldots,t'$$

mit Weierstraßpolynomen g_j in $o \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^1$ bzgl. u, $1 \in \{1,\dots,t'-1\}$ geeignet, a_{ji} holomorph in einer Umgebung der $O \in \mathbb{C}^n$.

Zu (β):

Ist $(a_1,\dots,a_{t'})$ eine Relation in $\mathrm{Rel}_k(g_1,\dots,g,P_{\ell+1},\dots,P_{t'})_{(z,u)}$ $(z,u) \in U_\varepsilon(o) \times U_\delta(o) \subset \mathbb{C}^u \times \mathbb{R}^1$, $p_{t'} \gtrsim p_j$, $j = \ell+1,\dots,t'$, so dividiert man wie bei dem Beweis zu (*) $a_1,\dots,a_{t'}$ durch $P_{t'}$, ersetzt man im folgenden $P_1,\dots,P_\ell$ durch $g_1,\dots,g_\ell$ und erhält mit Hilfe von (a_{n-1}) auf die gleiche Weise wie bei dem Schluß zu (**) $(b_r$

Zu (α): Faßt man die Variable u als komplexe Variable auf und zerlegt man $z_u = u + iv$, u,v reell, so ist (α) leicht auf (β) zurückzuführen mit den gleichen Schlüssen, die (*) und (**) ergaben.

Beachtet man insgesamt, daß die Verminderung des Differenzierbarkeitsgrades an den einzelnen Stellen vom Grad der auftretenden Weierstraßpolynome abhängt (vgl. [4]) so folgt sofort Satz 5. -

Für den Fall $k = \infty$ ergibt sich leicht Satz 1, [10] .

Literatur:

[1] R. Abraham, J. Robbin: Transversal mappings and flows, Benjamin

[2] J. Becker, J. C. Polking: C^k weakly holomorphic functions on an analytic curve. Rice University studies 1973

[3] M. Barbancon : Theoreme de Newton pour les fanctions de classe C^1 Ann. scient. Ec. Norm. Sup. t. 5, 1972

[4] M. G. Lasalle: Une demonstration de Theoreme de division pour les fonctions differentiables. Topology Vol. 12, 19

[5] B. Malgrange: Le Theoreme de prep. en geom. differentiable Seminaire H. Cartan 1962/63

[6] J. Mather: Stability of C^∞- mappings I Ann. Math. 87, 1968

[7] S. Lojasiewicz: In Proceedings of Liverpool Singularities Symposion, Lecture Notes in Math. 1971

[8] Nirenberg: "

[9] R. Narasinhan: Introduction to analytic spaces, Lecture Notes in Math. 1966

[10] A. Ramirez: Dissertation Göttingen 1970: Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis

[11] E. M. Stein: Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces. Princeton University Press 1971

[12] K. Spallek: Differenzierbare und holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen, Math. Ann. 161, 1965

L e b e n s l a u f

Am 17. 3. 1943 wurde ich als ältestes von 3 Kindern des Landwirtes Josef Skirde und dessen Ehefrau Hedwig, geb. Lange, in Wangst (Ostpreußen) geboren. Nach der Vertreibung gelangten wir 1946 zunächst in die Nähe von, dann nach Beckum (Westfalen), wo ich von 1949 bis 1954 die Volksschule und anschließend bis 1963 das humanistische Albertus-Magnus-Gymnasium besuchte. Nach bestandenem Abitur studierte ich ab Sommersemester 1963 an der Georg-August-Universität in Göttingen Mathematik als Hauptfach. Die Vordiplomprüfung bestand ich am 19. 7. 1965 und die Diplomprüfung mit einer Arbeit aus der reellen Analysis am 11. 6. 1969.

Mein Hauptarbeitsgebiet liegt seit dem Vordiplom dank der Lehrtätigkeit von Prof. Dr. H. Grauert in der komplexen Analysis und in Teilbereichen der reellen Analysis. Am 1. 2. 1971 wurde ich zum wissenschaftlichen Assistenten am mathematischen Institut der Universität Göttingen ernannt, nachdem ich vorher ein Jahr die Verwaltung einer Assistentenstelle innehatte.

Seit 1968 bin ich mit der Realschullehrerin Birgit Skirde, geb. Schäfer, verheiratet, wir wohnen seit 2 Jahren mit unserem am 6. 7. 1969 geborenen Sohn Ralph zusammen in Göttingen.